Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 1: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8	*Réservé au correcteur*

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert.

(a) Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $(a, b) \in E$ tel que $g(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Citer, sans démonstration, le théorème de la fonction implicite pour g.

(b) Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Supposons que f admet un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Supposons aussi que $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pour tout (x, y) tels que $g(x, y) = 0$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(a, b) \;=\; \lambda \, \nabla g(a, b).$$

Question 2: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 *Réservé au correcteur*

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

Question 3: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 *Réservé au correcteur*

Soit $A = \{a_1, \ldots a_{n+1}\}$ un ensemble de $n+1$ nombres naturels distincts tels que $1 \leq a_i \leq 2n$ pour tout $i = 1, \ldots n+1$. Démontrer par le principe des tiroirs qu'il existe deux nombres dans A dont la somme est $2n+1$.