Examen 2018, partie 2

Question 12 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$ et soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - x + y + xy}\,.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est :

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 3xy + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - \ xy + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 4xy + y^2$

Question 13 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy\,.$$

Alors :

- ☐ f admet un minimum local en $(0,0,0)$
- ☐ f n'admet pas d'extremum local en $(0,0,0)$
- ☐ $(0,0,0)$ n'est pas un point stationnaire de f
- ☐ f admet un maximum local en $(0,0,0)$

Question 14 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3y^3$$

et soit $g(x,y) = x^4 + 16y^4 - 32$. Alors, sous la contrainte $g(x,y) = 0$,

- ☐ la fonction f atteint son maximum absolu en exactement 4 points
- ☐ la fonction f atteint son minimum absolu en $(-2,1)$
- ☐ la fonction f atteint son minimum absolu en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son maximum absolu en $\left(\sqrt[4]{7}\,,\ \sqrt{5}/2\right)$

Question 15 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,,\ |y| \leq \min\{1, 2-x\}\right\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D xy^2\,dx\,dy$$

vaut :

- ☐ $\frac{2}{15}$
- ☐ $\frac{16}{15}$
- ☒ $\frac{8}{15}$
- ☐ $\frac{4}{15}$

$\boxed{Q15}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 .\ x \geq 0, |y| \leq \min\{1, 2-x\}\}$

$\to$ calculer $\int_D xy^2\,dx\,dy$.

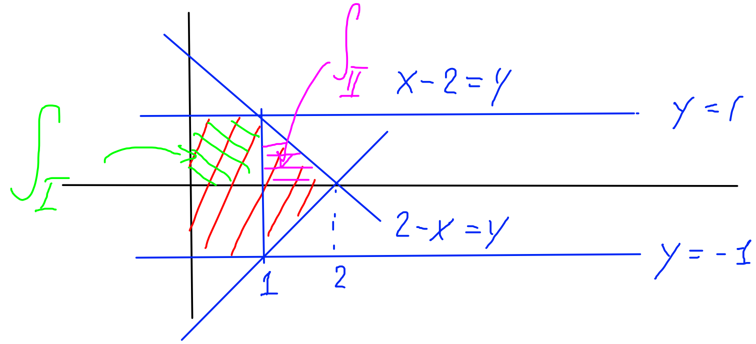
Question 16 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\,dy\right)dx$ vaut :

- ☐ $\frac{\mathrm{Log}(2)}{38}$
- ☒ $\frac{\mathrm{Log}(2)}{760}$
- ☐ $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}$
- ☐ $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}$

$\boxed{Q16}$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\,dy\right)dx$

$\boxed{Q15}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq \min\{1, 2-x\}\}$

$\rightarrow$ calculer $\int_D xy^2\,dx\,dy$.



$f(x,y) = xy^2$ symétrique $y \leftrightarrow -y$

$|y| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$

$|y| \leq 2-x \Rightarrow y \geq 0$ et $y \leq 2-x$

$y \leq 0$ et $-y \leq 2-x \Rightarrow y \geq x-2$

$$\int_D xy^2\,dx\,dy = 2\int_{I} + 2\int_{II}$$

$$\int_{I} = \int_0^1\int_0^1 xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$$\int_{II} = \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy\, xy^2 = \int_1^2 dx \cdot x \cdot \frac{1}{3}y^3\Big|_0^{2-x} = \int_1^2 dx \cdot \underbrace{x}_{2-t} \cdot \frac{1}{3}(2-x)^3 = \frac{1}{3}\int_1^0 (2-t)\cdot t^3\cdot(-dt) = \frac{1}{3}\int_0^1 (2t^3 - t^4)\,dt =$$

$t = 2-x$, $dx = -dt$

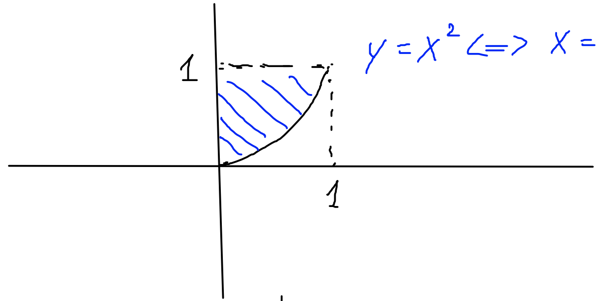
$$= \frac{1}{3}\frac{2}{4}t^4 - \frac{1}{3}\frac{1}{5}t^5\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{5-2}{30} = \frac{1}{10}.$$

$$\int_D xy^2\,dx\,dy = 2\int_{I} + 2\int_{II} = 2\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

$\Rightarrow \int_D xy^2\,dx\,dy = \frac{8}{15}$

Q16

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\, dy \right) dx = \int_D \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\, dx\, dy$$



$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$

Changer l'ordre d'intégration :

$$\int_D \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\, dx = \int_0^1 dy\, \frac{1}{1+y^{20}} \cdot \frac{1}{38} x^{38} \Big|_0^{\sqrt{y}} = \frac{1}{38} \int_0^1 dy\, \frac{y^{19}}{1+y^{20}} = \left[y^{19} dy = \frac{1}{20} d(y^{20}) \right]$$

$$= \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{20} \int_0^1 \frac{d(y^{20})}{1+y^{20}} = \frac{1}{760} \log(1+y^{20}) \Big|_0^1 = \frac{1}{760} \log 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\, dy \right) dx = \frac{1}{760} \log 2$$

Question 17 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \leq 0\}$.
Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz$$

vaut :

- ☐ $-\frac{4}{5}$
- ☒ $-\frac{31}{40}$
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{31}{30}$

Question 18 Soit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x}\, dx\,.$$

Alors on a :

- ☐ $F'(1) = 4e^e - e$
- ☐ $F'(1) = 2e^e - e$
- ☒ $F'(1) = 3e^e - e$
- ☐ $F'(1) = e^e - e$

$\boxed{Q17}$ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$

Calculer $\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\,dy\,dz$

$\boxed{Q18}$ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x}\, dx$

$\to$ trouver $F'(1)$

$\boxed{Q17}$ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, \; x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$

Calculer $\displaystyle\iiint_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$

Domaine D: $\{$sous-ensemble entre 2 sphères de rayon 1 et 2, centre $(0,0,0)\}$ $\cap$ $\{\frac{1}{8}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$: $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$

$\rightsquigarrow$ Coordonnées sphériques $\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$ $\Rightarrow D = \{1 \leq r \leq 2 \,;\, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi\}$

$$\Rightarrow \iiint_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\vartheta \int_1^2 dr\, \frac{r^3 \sin^2\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi \sin\varphi}{r} \cdot \underbrace{|J_{sph}|}_{= r^2 \sin\vartheta} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_1^2 r^4 \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d(\sin\varphi) \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\sin\vartheta \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4}\sin^4\vartheta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \frac{1}{5}(32-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(0-1) \cdot \frac{31}{5} = -\frac{31}{40}$$

$$\iiint_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = -\frac{31}{40}$$

$\boxed{Q18}$ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x} dx$ $\rightarrow$ trouver $F'(1)$

$$F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(t,x)\,dx \Rightarrow F'(t) = f(t, g(t)) \cdot g'(t) - f(t, h(t)) \cdot h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

$\Rightarrow$ Dans notre cas $F'(t) = e^{te^{t^2}} \cdot 2t + \int_0^{t^2} e^{te^x} \cdot e^x dx = 2t\, e^{t \cdot e^{t^2}} + \int_0^{t^2} e^{te^x} de^x =$

$$= 2t\, e^{te^{t^2}} + \frac{1}{t} \cdot e^{te^x} \Big|_0^{t^2} = 2t\, e^{te^{t^2}} + \frac{1}{t} e^{te^{t^2}} - \frac{1}{t} e^t \Big|_{t=1} = 2e^e + e^e - e = 3e^e - e.$$

$\Rightarrow \underline{F'(1) = 3e^e - e}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 19 Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \cos(y) = 0$, alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation sur I.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 20 Soit $(\boldsymbol{x}_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\boldsymbol{x}_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$. Alors il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 21 Soient $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}^n$. Si $(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ est une suite convergente alors $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ convergent aussi.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 22 Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si $\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = 1$, alors $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 1$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 23 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\overline{E}$ son adhérence. Si $E = \overline{E}$, alors la frontière de E est vide.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 + y^2 + z^2\}$. Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D, alors f est bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 Soit une fonction $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existent pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$ et $j \in \{1,\ldots,n\}$, alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en $\boldsymbol{a}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 Si la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ un minimum local, alors la fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ admet en $\boldsymbol{a}$ un maximum local.

☐ VRAI ☐ FAUX

Vrai - Faux

Q19 $y_1' - \cos(y_1) = 0$ et $y_2' - \cos(y_2) = 0$

$(y_1+y_2)' - \cos(y_1+y_2) = \underbrace{y_1' + y_2' - \cos y_1 \cos y_2 + \sin y_1 \sin y_2}_{=0\,??}$

=> pas forcément => Faux

Q20 $(\bar{X}_k)_{k\geq 1}$: $\|X_k\| = 1$ $\forall k \in 1$

=> $\exists \lim_{k\to\infty} \bar{X}_k = \bar{X}$, t.q. $\|\bar{X}\| = 1$

Contre-exemple : $X_k = (-1)^k$, $\lim_{k\to\infty} X_k$ n'existe pas

=> Faux

Q21 $(\bar{u}_k)_{k\geq 1}$, $(\bar{v}_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathbb{R}^n$, t.q.

$(\bar{u}_k + \bar{v}_k)_{k\geq 1}$ converge. => $(\bar{u}_k)$ et $(\bar{v}_k)$ convergent.

Contre-exemple: $(\bar{u}_k)_{k\geq 1}$ divergente ; $\bar{v}_k = -\bar{u}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

=> $\bar{u}_k + \bar{v}_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ => $(\bar{u}_k + \bar{v}_k)$ converge, mais

$\bar{u}_k$ et $\bar{v}_k = -\bar{u}_k$ divergent => Faux

Q22 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue, $(\bar{a}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \in \mathbb{R}^n$

Si $\lim_{k\to\infty} f(\bar{a}_k) = 1$ => $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(x) = 1$.

f continue => $\forall$ suite convergente vers $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$

on a $f(\bar{a}_k) \to f(\bar{a}) = \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$

=> Vrai

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 19 Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \cos(y) = 0$, alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation sur I.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 Soit $(\boldsymbol{x}_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\boldsymbol{x}_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$. Alors il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 Soient $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}^n$. Si $(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ est une suite convergente alors $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ convergent aussi.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si $\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = 1$, alors $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\bar{E}$ son adhérence. Si $E = \bar{E}$, alors la frontière de E est vide.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 24 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 + y^2 + z^2\}$. Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D, alors f est bornée.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 25 Soit une fonction $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existent pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$ et $j \in \{1,\ldots,n\}$, alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en $\boldsymbol{a}$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 26 Si la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ un minimum local, alors la fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ admet en $\boldsymbol{a}$ un maximum local.

☒ VRAI ☐ FAUX

$\boxed{Q23}$ $E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{E}$ son adhérance

Si $E = \bar{E}$ => la frontière de E est vide.

Contre-exemple: $E = \bar{E} \iff E$ est fermé

$E = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E = \bar{E}$

La frontière $\partial E = \{x^2+y^2+z^2 = 1\} \neq \emptyset$ => Faux

$\boxed{Q24}$ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1+y^2+z^2\}$ Si $f: D \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.

D n'est pas compact; n'est pas borné:

$(M, M, 0) \in D \ \forall M \in \mathbb{N}$ comme $M^2 \leq 1 + M^2$; par exemple $f(x) = x$ n'est pas bornée sur D => Faux

$\boxed{Q25}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{a})$ existent $\forall i,j$ => f est différentiable en $\bar{a}$.

L'existence des dérivées partielles n'implique pas la dérivabilité de la fonction

(Contre-exemple Q7) => Faux

$\boxed{Q26}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, min local en $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$

Alors la fonction $g(\bar{x}) = -f(\bar{x})$ admet en $\bar{a}$ un max local.

min local => $f(\bar{a}) \leq f(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in$ voisinage de $\bar{a}$

=> $-f(\bar{a}) \geq -f(\bar{x})$

$g(\bar{a}) \geq g(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in$ voisinage de $\bar{a}$

=> g admet un max local en $\bar{a}$ => Vrai

Question 27 Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, alors $\int_D e^{x^2}\,dx\,dy \leq \pi e$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 28 Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide, fermé et borné et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$-\int_D |f(\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x} \leq \int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \leq \int_D |f(\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x}$$

si les intégrales existent.

☒ VRAI ☐ FAUX

$\boxed{Q27}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

Alors $\int_D e^{x^2}dxdy \leq \pi \cdot e$

$e^{x^2} > 0$ sur D

$|e^{x^2}| \leq e$ sur D : $x^2 \leq x^2+y^2 \leq 1$ sur D

$\Rightarrow \int_D e^{x^2}dxdy \leq e \cdot \text{Aire}(D) = e\cdot\pi\cdot 1^2 = e\cdot\pi$.

D = dique de rayon 1

$\Rightarrow$ Vrai.

$\boxed{Q28}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ compact; $f : D \to \mathbb{R}$ continue Alors

$$-\int_D |f(\bar{x})|d\bar{x} \leq \int_D f(\bar{x})d\bar{x} \leq \int_D |f(\bar{x})|d\bar{x}.$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in D$

les intégrales existent $\Rightarrow$ Vrai.