

Examen 2018, partie 1.

(Disponible sur Moodle → Exercices supplémentaires)

-1-

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' + 6x^5 y^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{1}{3}$ vérifie aussi :

☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{13}{24}$

☐ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{3e^7}$

☒ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}$

☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$

Question 2 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' + y = x^2 e^{-x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi :

☐ $y(-2) = -3e^{-2}$

☒ $y(-2) = -3e^2$

☐ $y(-2) = -\frac{5}{4}(e^2 - e^{-4})$

☐ $y(-2) = -\frac{1}{4}(e^4 - 13e^{-2})$

Question 3 La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' - 2u' + 5u = 17 \sin(2t)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi :

☐ $u(\pi) = 4 - 4e^\pi$

☒ $u(\pi) = 4 - 3e^\pi$

☐ $u(\pi) = -4 + 5e^\pi$

☐ $u(\pi) = 4$

Question 4 Soient les sous-ensembles

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Alors l'ensemble non vide $A \cap B \subset \mathbb{R}^3$ est :

☐ ouvert et borné

☒ fermé et borné

☐ ouvert et non borné

☐ fermé et non borné

Q1.

$$y' + 6x^5 y^2 = 0$$

$$EDVS ; y(1) = \frac{1}{3}$$

→ trouver $y(\sqrt{2})$.

Q2

$$y' + y = x^2 e^{-x}, \quad y(1) = 0$$

→ trouver $y(-2)$

Q3

$$u(t) \rightsquigarrow y(x)$$

$$y'' - 2y' + 5y = 17 \sin(2x)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \rightarrow \text{trouver } y(\pi)$$

Q4

$$\underbrace{\{x + y + z \leq 0\}}_A \cap \underbrace{\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}}_B$$

→ propriétés de $A \cap B$

Q1. $y' + 6x^5 y^2 = 0$ EDVS ; $y(1) = \frac{1}{3} \rightarrow$ trouver $y(\sqrt{2})$.

$$\frac{dy}{dx} = -6x^5 y^2 \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = 6x^5 dx \Rightarrow -\int \frac{dy}{y^2} = \int 6x^5 dx \Rightarrow \frac{1}{y} = x^6 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{C+x^6}, \text{ avec la condition initiale donnée } \Rightarrow y(1) = \frac{1}{C+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow C=2$$

$$y(\sqrt{2}) = \frac{1}{2+(\sqrt{2})^6} = \frac{1}{2+2^3} = \frac{1}{2+8} = \frac{1}{10} \Rightarrow \underline{y(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}}$$

Q2 $y' + y = x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0 \rightarrow$ trouver $y(-2)$. EDL1

$$y' + p(x)y = f(x) \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-P(x)}, \text{ où } P(x) = \int p(x) dx \text{ (sans constante)}$$

$$C(x) = \int f(x) e^{P(x)} dx.$$

$$P(x) = \int 1 \cdot dx = x \Rightarrow C(x) = \int x^2 e^{-x} \cdot e^x dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) e^{-x} = \frac{1}{3} x^3 e^{-x} + C e^{-x}; \text{ avec la condition initiale } \Rightarrow$$

$$y(1) = \frac{1}{3} e^{-1} + C e^{-1} = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$y(-2) = \frac{1}{3} (-2)^3 e^2 - \frac{1}{3} e^2 = -\frac{8}{3} e^2 - \frac{1}{3} e^2 = -3e^2 \Rightarrow \underline{y(-2) = -3e^2}$$

Q3

$u(t) \rightsquigarrow y(x)$ $y'' - 2y' + 5y = 17 \sin(2x)$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$
→ trouver $y(\pi)$ EDL2 à coefficients constants.

→ Équation homogène $y'' - 2y' + 5y = 0 \Rightarrow$ équation caractéristique $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$
 $\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

$\Rightarrow$ Solution de l'équation homogène $y_h(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$
 $f(x) = 17 \sin(2x)$ $2i \neq$ solution de l'équation caractéristique

$\Rightarrow$ Ansatz $y(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$; $y'(x) = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$,
 $y''(x) = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x \rightsquigarrow$ dans l'équation $\Rightarrow$
 $-4A \sin 2x - 4B \cos 2x - 4A \cos 2x + 4B \sin 2x + 5A \sin 2x + 5B \cos 2x = 17 \sin 2x$.

$\Rightarrow \begin{cases} B - 4A = 0 \\ A + 4B = 17 \end{cases} \Rightarrow B = 4A$
 $\Rightarrow A + 16A = 17 \Rightarrow A = 1, B = 4$

$y_p = \sin 2x + 4 \cos 2x$ solution particulière

Solution générale: $y(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + \sin 2x + 4 \cos 2x$. (en effet $C_2 = 1$)

$\rightsquigarrow y(0) = C_1 + 4 = 1 \Rightarrow C_1 = -3$; $y(\pi) = C_1 e^\pi + 4$ pas besoin de C_2 !!

$\Rightarrow y(\pi) = -3e^\pi + 4$

Q4

$$A = \{x+y+z \leq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$B = \{x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$$

$\rightarrow$ propriétés de $A \cap B$

$\bar{A} = A \Rightarrow A$ est fermé ; non-borné

B = la sphère de rayon 1 et de centre à l'origine

$B = \bar{B} \Rightarrow B$ est fermé ; B est borné.

$\Rightarrow \underset{\text{fermé}}{A} \cap \underset{\text{fermé}}{B} = \text{fermé} ; A \cap B$ est borné puisque B est borné.

$\Rightarrow A \cap B$ est fermé et borné.

Q5

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{x y^3}{x^2 + y^6} \right)$$

Question 5 La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{x y^3}{x^2 + y^6} \right)$

- ☐ vaut 0
☒ n'existe pas
☐ vaut 2
☐ vaut 1

Question 6 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- ☒ la fonction f est continue en $(0, 0)$
☐ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \neq \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$
☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe mais $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existe pas
☐ la fonction f est continue en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$

Question 7 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existent pas
☒ Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
☐ f est différentiable en $(0, 0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 8 Soit la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\}$. L'équation du plan tangent à S au point $(-1, 1, 1)$ est donnée par :

- ☐ $x - y - 4z + 6 = 0$
☐ $4x - 2y - 8z - 14 = 0$
☐ $4x - 2y - 8z + 8 = 0$
☒ $2x - y - 4z + 7 = 0$

Q6

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ propriétés de continuité

Q7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\rightarrow$ propriétés de dérivabilité

Q8

Surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\}$

$\rightarrow$ le plan tangent à S au point $(-1, 1, 1)$

Q5

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{x y^3}{x^2 + y^6} \right)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r}_{\downarrow 0} \underbrace{\cos^2 \varphi \sin \varphi}_{\text{bornée}} = 0.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x y^3}{x^2 + y^6} \quad (0, \frac{1}{k}) \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^6}} = \underline{0} ; \quad (\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}) \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3} \cdot \frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^6} + \frac{1}{k^6}} = \underline{\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow \text{n'existe pas.}$$

$\Rightarrow$ La limite n'existe pas

Q6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin(\frac{1}{x})} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ propriétés de continuité

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{y}{2 + \sin(\frac{1}{x})} ; \quad g(x,y) = \frac{y}{2 + \underbrace{\sin(\frac{1}{x})}_{-1 \leq \leq 1}} \Rightarrow$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0.$$

$$\begin{array}{ccccc} |\frac{y}{3}| & \leq & |f(x,y)| & \leq & |\frac{y}{1}| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (x,y) \rightarrow 0 \\ \text{par les 2 gendarmes} \end{array}$$

$\Rightarrow$ f est continue en (0,0)

Par exemple, f, n'est pas continue au point (0,5)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,5)} \frac{y}{2 + \sin(\frac{1}{x})} \text{ oscillante ; n'existe pas.}$$

Q7

-7-

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \leadsto \text{propriétés de dérivabilité}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x| \cdot x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0). \text{ Dérivabilité? } r(x,y) = f(x,y) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = f(x,y) = \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - xy}{x^2 + y^2}$$

$$(0, \frac{1}{k}) \leadsto \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^2}} = 0 \quad ; \quad (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \leadsto \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{la limite n'existe pas}$$

$\Rightarrow$ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, mais la fonction n'est pas différentiable à $(0,0)$

Q8

Surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\} \leadsto$ le plan tangent à S au point $(-1,1,1)$

$$\nabla F(x,y,z) = \nabla (x^4 + y^2 + 4z^2 - 6) = (4x^3, 2y, 8z) \Big|_{(-1,1,1)} = (-4, 2, 8)$$

$$\langle \nabla F(x,y,z), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle (-4, 2, 8), (x+1, y-1, z-1) \rangle = -4x - 4 + 2y - 2 + 8z - 8 = 0 \Rightarrow -4x + 2y + 8z - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{2x - y - 4z + 7 = 0.}$$

Question 9 Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$.

Alors la matrice jacobienne de f évaluée en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est :

☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) 2x & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$

☒ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) 2x \\ 1 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 10 Soient $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $g(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy + e^y \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto h(u, v)$$

définie par $h = f \circ g$ satisfait :

☐ $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -3$

☐ $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -1$

☒ $\frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -3$

☐ $\frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -1$

Question 11 Soit $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/6}, \sqrt{2\pi/3})$ et soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2)$.

L'équation $f(x, y) = 0$ définit dans un voisinage de x_0 une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$. De plus, on a :

☐ $g'(x_0) = -\frac{\pi}{2}$

☐ $g'(x_0) = \frac{\pi}{2}$

☐ $g'(x_0) = -\frac{1}{2}$

☒ $g'(x_0) = \frac{1}{2}$

Q9 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$
 $J_f(x, y, z) = ?$

Q10 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy + e^y \end{pmatrix}$$

$\rightarrow h = f \circ g$; trouver $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 1), \frac{\partial h}{\partial v}(0, 1)$

Q11 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2)$

L'équation $f(x, y) = 0$ définit autour de

$(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/6}, \sqrt{2\pi/3})$ une fonction $y = g(x)$

telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$.

$\rightarrow$ trouver $g'(x_0)$

Q9 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^y \\ y^2 + x \end{pmatrix} \quad J_f(x, y, z) = ?$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1+x^2)^{y-1} \cdot 2x & (1+x^2)^y \cdot \log(1+x^2) & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

$$((g(x))^b)' = b g(x)^{b-1} \cdot g'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

Q10 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telle que $J_f(x, y) = (3x^2 + y^2 \quad 2xy + e^y)$

$\rightarrow h = f \circ g$; trouver $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 1), \frac{\partial h}{\partial v}(0, 1)$

$$J_{f \circ g}(u, v) = J_f(g(u, v)) \cdot J_g(u, v) = (3v^2 + u^2 \quad -2uv + e^u) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-2uv + e^u \quad -3v^2 + u^2)$$

$$J_{f \circ g}(u, v) = (-2uv + e^u \quad -3v^2 + u^2) \Big|_{(0, 1)} = (1, -3) = \left(\frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) \quad \frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) \right)$$

$\Rightarrow \underline{\frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -3}$

Q11 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \sin(x^2) + \cos(y^2)$ L'équation $f(x,y) = 0$ définit autour de $(x_0, y_0) = (\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{2\pi}{3}})$ une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$.

→ trouver $g'(x_0)$

(1) Vérifier que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin(y^2) \Big|_{y_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}} \neq 0 \leadsto$ on applique TFI

$$(2) \leadsto \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = - \frac{\cancel{2}x \cos(x^2)}{\cancel{-2}y \sin(y^2)} \Big|_{(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{2\pi}{3}})} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cos(\frac{\pi}{6})}{\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin(\frac{2\pi}{3})} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow g'(x_0) = \frac{1}{2}$

Question 12 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$ et soit la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x + y + xy}.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0, 0)$ est :

- ☒ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 3xy + y^2$
☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy + y^2$
☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - xy + y^2$
☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 4xy + y^2$

Question 13 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy.$$

Alors :

- ☐ f admet un minimum local en $(0, 0, 0)$
☒ f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0, 0)$
☐ $(0, 0, 0)$ n'est pas un point stationnaire de f
☐ f admet un maximum local en $(0, 0, 0)$

Question 14 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 y^3$$

et soit $g(x, y) = x^4 + 16y^4 - 32$. Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

- ☐ la fonction f atteint son maximum absolu en exactement 4 points
☒ la fonction f atteint son minimum absolu en $(-2, 1)$
☐ la fonction f atteint son minimum absolu en un seul point
☐ la fonction f atteint son maximum absolu en $(\sqrt[3]{7}, \sqrt{5}/2)$

Question 15 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq \min\{1, 2 - x\}\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D xy^2 dx dy$$

vaut :

- ☐ $\frac{2}{15}$
☐ $\frac{16}{15}$
☐ $\frac{8}{15}$
☐ $\frac{4}{15}$

Question 16 L'intégrale $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1 + y^{20}} dy \right) dx$ vaut :

- ☐ $\frac{\text{Log}(2)}{38}$
☐ $\frac{\text{Log}(2)}{760}$
☐ $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}$
☐ $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}$

Q12

$$f : \{x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x + y + xy}$$

→ Polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(0, 0)$

Q13

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

→ trouver la nature du point $(0, 0, 0)$

Q14

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 y^3$$

sous la contrainte $g(x, y) = x^4 + 16y^4 - 32 = 0$.

→ trouver min, max absolus.

Q12 $f: \{x^2+y^2 < \frac{1}{4}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+xy}$

fonction de la forme $\frac{1}{1-t}$, où t est petit $\leadsto$ Polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(0,0)$
 (x,y) autour de $(0,0)$.

$$t = x - y - xy$$

$$\leadsto \text{Le DL} \leadsto \frac{1}{1-t} = \underline{1+t+t^2} + \varepsilon(t^3)$$

$$\leadsto P_{f,2}(x,y) = 1 + (x-y-xy) + (x-y-xy)^2 = \underline{1+x-y-xy+x^2+y^2-2xy} + \dots \text{termes d'ordre} \geq 3.$$

$$\Rightarrow \underline{P_2(x,y) = 1-x-y-3xy+x^2+y^2} \quad P_2 f(x,y)$$

Q13. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\leadsto$ trouver la nature du point $(0,0,0)$.

$(0,0,0)$ - point stationnaire? $\nabla f(x,y,z) = (2x-5y, 2y-5x, 6z) \Big|_{(0,0,0)} = (0,0,0) \Rightarrow \text{où}.$

$$\text{Hess}_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2; \quad \Delta_2 = 4 - 25 = -21$$

$$\Delta_3 = 24 - 150$$

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 < 0$$

Thm. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \Rightarrow \text{min loc}$

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \Rightarrow \text{max loc}$

Sinon, si $\Delta_3 \neq 0$, ce n'est pas un extremum local.

$\Rightarrow (0,0,0)$ n'est pas un point d'extremum local.

Q14. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 y^3$ sous la contrainte $g(x,y) = x^4 + 16y^4 - 32 = 0$
 $\rightarrow$ trouver min, max absolus.

(i) Vérifier $\nabla g(x,y) = (4x^3, 64y^3) \neq (0,0)$ sur $g(x,y) = 0$ Vrai
 $(x,y) = (0,0)$ n'est pas sur la courbe.
 $\Rightarrow$ on peut appliquer le thm sur les multiplicateurs de Lagrange.

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \nabla f(x,y) = (3x^2 y^3, 3x^3 y^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 y^3 = \lambda \cdot 4x^3 \\ 3x^3 y^2 = \lambda \cdot 64y^3 \\ x^4 + 16y^4 = 32 \end{cases} \Rightarrow \text{soit } x=0, \text{ soit } \lambda = \frac{3y^3}{4x}$$

$\Rightarrow y=0$
 $\Downarrow$
 $(0,0)$ n'est pas sur la courbe

$$\begin{cases} \cancel{3}x^3 y^2 = \frac{\cancel{3}y^3}{\cancel{4}x} \cdot \frac{16}{\cancel{64}} y^3 \\ x^4 + 16y^4 = 32 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 = 16y^4 \\ x^4 + 16y^4 = 32 \end{cases} \Rightarrow 32y^4 = 32 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x^4 = 16y^4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$\rightarrow$ les points qui peuvent apporter le min, max absolus sont

	(1, 2)	(-1, 2)	(1, -2)	(-1, -2)
$f(x,y)$	8	-8	-8	8

$\swarrow$ $\nwarrow$
 min absolu
 $\searrow$ $\nearrow$
 max absolu