+1/1/60+

Ens. A. Lachowska
Analyse II - (n/a)
28 avril 2025
Durée : 55 minutes

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignante se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{x}{x^2+9}\big(y(x) - 1\big)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi

- ☐ $y(4) = 6$
- ☐ $y(4) = 11$
- ☐ $y(4) = 26$
- ☐ $y(4) = 0$

Question 2 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(2) = \frac{3}{20}$
- ☐ $y(2) = -\frac{2}{15}$
- ☐ $y(2) = -\frac{1}{10}$
- ☐ $y(2) = 0$

Question 3 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 4e^{-x}$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = -2$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

- ☐ $y\big(\ln(3)\big) = -\frac{1}{3}$
- ☐ $y\big(\ln(3)\big) = 0$
- ☐ $y\big(\ln(3)\big) = -\frac{4}{9}$
- ☐ $y\big(\ln(3)\big) = -12$

Question 4 : Le sous-ensemble

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

- ☐ est ouvert et borné
- ☐ est fermé et non borné
- ☐ est fermé et borné
- ☐ est ouvert et non borné

Question 5 : Soit $\{\overline{x}_n\}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\overline{x}_n = \left(n \sin\Big(\frac{(-1)^n}{n}\Big),\ \frac{(-1)^n}{n}\sin(n)\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \text{pour tout } n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Alors

- ☐ la suite converge et $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = (0,\, 1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ la suite n'est pas bornée
- ☐ la suite est bornée mais pas convergente
- ☐ la suite converge et $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = (1,\, 0)^{\mathrm{T}}$

Question 6 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y+y^3x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ f est dérivable en $(0,0)$
- ☐ f est continue en $(0,0)$ mais f n'est pas dérivable en $(0,0)$
- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$

Question 7 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(\pi x^2 y)\,.$$

Alors la dérivée directionnelle $D_{\overline{v}}f(1,1)$ de f en $(1,1)$ suivant le vecteur $\overline{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$ vaut

- ☐ -3π
- ☐ 0
- ☐ $-\dfrac{3\pi}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\dfrac{6\pi}{\sqrt{5}}$

Question 8 : Soit $\overline{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$\overline{f}(x,y) = \left(xy,\, x^2+y^2\right)^{\mathrm{T}}$$

et soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla g(1,2) = \left(1,\, -\tfrac{1}{4}\right).$$

Alors la fonction composée $h = g \circ \overline{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait

- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\frac{3}{2}\,,\,0\right)$
- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\frac{3}{4}\,,\,\frac{3}{2}\right)$
- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$
- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\frac{7}{4}\,,\,1\right)$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, alors l'ensemble

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ et } z = 0\big\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, $\lim_{r\to 0} h(r) = 0$ et

$$g(r) \leq f\big(r\cos(\vartheta)\,,\, r\sin(\vartheta)\big) \leq h(r) \qquad \text{pour tout } r > 0 \text{ et pour tout } \vartheta \in \mathbb{R},$$

alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in U$ est tel que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$, alors $f(x_0, y_0) = L$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $(0, 0)$, telle que

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla f(0, 0) = \big(0,\, 0\big)\,.$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX