



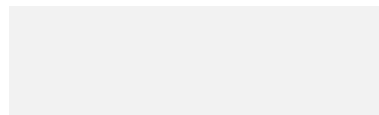
Ens. A. Lachowska
Analyse II - (n/a)
28 avril 2025
Durée : 55 minutes

n/a

n/a













SCIPER : 999999

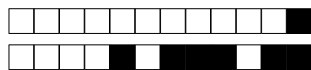
Signature :



Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignante se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures.
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{x}{x^2 + 9}(y(x) - 1)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi

- ☐ $y(4) = 6$ ☐ $y(4) = 11$ ☐ $y(4) = 26$ ☐ $y(4) = 0$

Question 2 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(2) = \frac{3}{20}$ ☐ $y(2) = -\frac{2}{15}$ ☐ $y(2) = -\frac{1}{10}$ ☐ $y(2) = 0$

Question 3 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 4e^{-x}$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = -2$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

- ☐ $y(\ln(3)) = -\frac{1}{3}$ ☐ $y(\ln(3)) = 0$ ☐ $y(\ln(3)) = -\frac{4}{9}$ ☐ $y(\ln(3)) = -12$

Question 4 : Le sous-ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

- ☐ est ouvert et borné
☐ est fermé et non borné
☐ est fermé et borné
☐ est ouvert et non borné

Question 5 : Soit $\{\bar{x}_n\}$ la suite d'éléments de \mathbb{R}^2 définie par

$$\bar{x}_n = \left(n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \frac{(-1)^n}{n} \sin(n) \right)^T, \quad \text{pour tout } n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Alors

- ☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = (0, 1)^T$
☐ la suite n'est pas bornée
☐ la suite est bornée mais pas convergente
☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = (1, 0)^T$



Question 6 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y + y^3 x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas

☐ f est dérivable en $(0, 0)$

☐ f est continue en $(0, 0)$ mais f n'est pas dérivable en $(0, 0)$

☐ f n'est pas continue en $(0, 0)$

Question 7 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(\pi x^2 y).$$

Alors la dérivée directionnelle $D_{\bar{v}}f(1, 1)$ de f en $(1, 1)$ suivant le vecteur $\bar{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$ vaut

☐ -3π

☐ 0

☐ $-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$

☐ $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$

Question 8 : Soit $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$\bar{f}(x, y) = (xy, x^2 + y^2)^T$$

et soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla g(1, 2) = \left(1, -\frac{1}{4}\right).$$

Alors la fonction composée $h = g \circ \bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

☐ $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

☐ $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

☐ $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

☐ $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{7}{4}, 1\right)$



Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , alors l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ et } z = 0\}$$

est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{R}^n . Alors

$$\partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0$ et

$$g(r) \leq f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) \leq h(r) \quad \text{pour tout } r > 0 \text{ et pour tout } \vartheta \in \mathbb{R},$$

alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^2$.

Si $(x_0, y_0) \in U$ est tel que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$, alors $f(x_0, y_0) = L$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $(0, 0)$, telle que

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0).$$

Alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX