EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
17 avril 2025

Analyse II – Série 9

Exercice 1. (Laplacien)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit la fonction $\bar{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\bar{f}(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\qquad \text{où}\qquad \begin{cases} u=2x-y\\ v=x+3y\end{cases}.$$

Exprimer le laplacien $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ par rapport aux variables u et v.

Exercice 2. (Changement de coordonnées)

Soit $D\subset\mathbb{R}^2$ et soit $H\colon D\to\mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées défini par $(u,v)=H(x,y)$ avec

$$u=x^2+2y^2\,,\qquad v=\frac{y}{\sqrt{x}}\,.$$

i) Trouver le domaine D et l'image $\tilde{D}$ de H. Calculer la transformation inverse $G\colon\tilde{D}\to D$ ainsi que sa matrice jacobienne $J_G(u,v)$ et évaluer cette dernière en $(u,v)=H(x,y)$.

ii) Calculer $\big(J_H(x,y)\big)^{-1}$ et comparer avec le résultat de *i*). L'égalité obtenue est-elle vraie en général?

Exercice 3. (Laplacien en coordonnées polaires)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Exprimer le laplacien $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ par rapport aux coordonnées polaires r et φ où

$$\begin{cases} x=r\cos(\varphi)\\ y=r\sin(\varphi)\end{cases}.$$

Exercice 4. (Coordonnées sphériques)

Soit $G\colon\mathbb{R}_+^*\times[0,\pi]\times[0,2\pi[\;\longrightarrow\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ le changement de coordonnées défini par $(x,y,z)=G(\rho,\theta,\varphi)$ avec

$$\begin{aligned} x&=\rho\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ y&=\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ z&=\rho\cos(\theta)\end{aligned}$$

i) Vérifier que $(x,y,z)=G(\rho,\theta,\varphi)$ se trouve sur la sphère de rayon ρ pour tout θ et φ.

ii) Calculer la matrice jacobienne J_G de G et son déterminant.

Ex. 5 et 6 au verso.

iii) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que la fonction composée $f \circ G$ ne dépend que de ρ. Exprimer le gradient $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ par rapport aux coordonnées sphériques.

Exercice 5. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 telle que $g(1,1) = (1,1)$ et sa matrice Jacobienne est donnée par l'expression si-dessous pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Trouver la valeur $g(-1,2)$ et les domaines $E \subset \mathbb{R}^2$ où la fonction g est localement bijective.

i)

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

ii)

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 4x & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (Dérivées d'intégrales avec paramètre)

Pour les fonctions $F\colon]1,\infty[\to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer la dérivée $F'(t)$.

i) $F(t) = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^t + \sin(x)}{\log(x)}\, dx$ *ii)* $F(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \log(x^2+t^2)\, dx$

iii) $F(t) = \displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{e^{tx^3}}{x}\, dx$

****

Exercice 7. (Récurrence sur deux variables)

Démontrez la proposition suivante par récurrence sur deux variables (méthode carrée). Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Lucas: $l_0 = 2, l_1 = 1$, et $l_{n+2} = l_n + l_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$f_{m+n} = \frac{1}{2}\left(f_m l_n + l_m f_n\right).$$

Exercice 8. (Récurrence sur deux variables)

Choisissez la méthode et démontrez la proposition:
Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci, et $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Lucas: $l_0 = 2, l_1 = 1$, et $l_{n+2} = l_n + l_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N} :\ k \leq n$ on a

$$f_{n+k} + (-1)^k f_{n-k} = l_k f_n.$$