

Analyse II – Série 14

Exercice 1. (Volume de la sphère)

Calculer le volume d'une sphère de rayon R en coordonnées cylindriques.

Exercice 2. (Changement de variable)

i) Evaluer l'intégrale double

$$\iint_D x^3 y^3 \, dx \, dy,$$

où D est le domaine dans le premier quadrant limité par les courbes $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = 4$.

Esquisser les quatre courbes et le domaine d'intégration D .

ii) Esquisser le domaine $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 4x, 1 \leq xy \leq 2\}$ et calculer l'intégrale double

$$\iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy.$$

Exercice 3. (Changement d'ordre d'intégration)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner les expressions des intégrales suivantes avec l'ordre des variables d'intégration échangé.

i)

$$\int_0^3 dx \int_{1-\frac{1}{3}x}^1 f(x, y) \, dy.$$

ii)

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} f(x, y) \, dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} f(x, y) \, dy.$$

iii)

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\frac{2}{e}y-\frac{1}{e}}^{e^y} f(x, y) \, dx.$$

Exercice 4. (Calcul de volume I)

Déterminer le volume du solide délimité par la surface cylindrique $x^2 + z^2 = 1$ et les plans $x + y + z = 1$, $2y - z = 6$ et $z = 0$ tel que $z \geq 0$.

Exercice 5. (Calcul de volume II)

Soit D le domaine délimité par l'extérieur du cône d'équation $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2}z - 3)^2$ et l'intérieur de la sphère de rayon 5 centrée en $(0, 0, 1)$ (cf. Fig. 1). Calculer le volume de D .

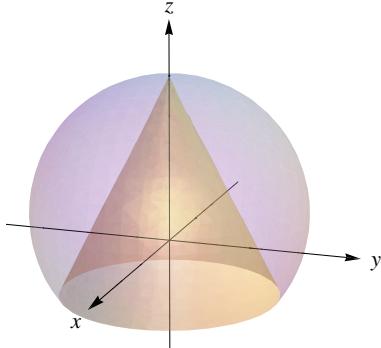


Figure 1: Exercice 5

Exercice 6. (Masse totale)

Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, y \leq z \leq 1\}.$$

Calculer la masse totale de D , si la densité de masse $\rho: D \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$\rho(x, y, z) = z^{7/2} e^{-y^{3/2} z^{3/2}}.$$