

## Analyse II – Série 14

### Exercice 1. (Volume de la sphère)

Calculer le volume d'une sphère de rayon  $R$  en coordonnées cylindriques.

### Exercice 2. (Changement de variable)

i) Evaluer l'intégrale double

$$\iint_D x^3 y^3 dx dy,$$

où  $D$  est le domaine dans le premier quadrant limité par les courbes  $x^2 + y^2 = 5$ ,  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x^2 - y^2 = 1$  et  $x^2 - y^2 = 4$ .

Esquisser les quatre courbes et le domaine d'intégration  $D$ .

ii) Esquisser le domaine  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 4x, 1 \leq xy \leq 2\}$  et calculer l'intégrale double

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy.$$

### Exercice 3. (Changement d'ordre d'intégration)

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Donner les expressions des intégrales suivantes avec l'ordre des variables d'intégration échangé.

i)

$$\int_0^3 dx \int_{1-\frac{1}{3}x}^1 f(x, y) dy.$$

ii)

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy.$$

iii)

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\frac{2}{e}y - \frac{1}{e}}^{e^y} f(x, y) dx.$$

### Exercice 4. (Calcul de volume I)

Déterminer le volume du solide délimité par la surface cylindrique  $x^2 + z^2 = 1$  et les plans  $x + y + z = 1$ ,  $2y - z = 6$  et  $z = 0$  tel que  $z \geq 0$ .

**Exercice 5.** (Calcul de volume II)

Soit  $D$  le domaine délimité par l'extérieur du cône d'équation  $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}z - 3\right)^2$  et l'intérieur de la sphère de rayon 5 centrée en  $(0, 0, 1)$  (cf. Fig. 1). Calculer le volume de  $D$ .

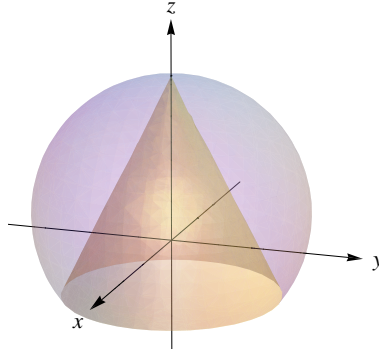


Figure 1: Exercice 5

**Exercice 6.** (Masse totale)

Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, y \leq z \leq 1\}.$$

Calculer la masse totale de  $D$ , si la densité de masse  $\rho: D \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$\rho(x, y, z) = z^{7/2} e^{-y^{3/2} z^{3/2}}.$$