EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
22 mai 2025

Analyse II – Série 13

Exercice 1. (Intégration sur un pavé fermé)

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dx\, dy$ en intégrant d'abord

(i) par rapport à x (ii) par rapport à y.

Comparer les résultats.

Exercice 2. (Intégrales doubles)

Calculer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\displaystyle\int_{-1}^2\int_0^1 \cos(x+y)\, dx\, dy$ ii) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2x} e^{x+y}\, dy\, dx$

Exercice 3. (Intégration sur un domaine)

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ et esquisser le domaine d'intégration D si

i) $f(x,y) = \sqrt{x+y}\,,\qquad D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

ii) $f(x,y) = x^2 y\,,\qquad D = \{(x,y) : 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 2\}$

iii) $f(x,y) = |(x-y)(x+y-2)|\,,\qquad D = \{(x,y) : 0 \le y \le x,\ x+y-2 \le 0\}$

Exercice 4. (Théorème de Fubini)

Evaluer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{(x^2)}\, dx\, dy$ ii) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx\, dy$

Exercice 5. (Décomposition du domaine)

Esquisser le domaine $D = \{(x,y) : y^2 \le x,\ x-6 \le y \le x\}$ et calculer son aire.

Exercice 6. (Changement de variables)

Soient les domaines $D, E \subset \mathbb{R}^2$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soient $G\colon E \to D$ et $H\colon D \to E$ des applications bijectives telles que $G = H^{-1}$ et notons

$$G(u,v) = \big(G_1(u,v), G_2(u,v)\big) \qquad \text{et} \qquad H(x,y) = \big(H_1(x,y), H_2(x,y)\big).$$

L'intégrale de f sur D est alors (cf. cours)

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_E f\big(G_1(u,v), G_2(u,v)\big)\, \big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\, du\, dv\,,$$

où

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

est la matrice Jacobienne de G.

Ex. 7 au verso.

i) Dans le cas des coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, définir l'application G et calculer son Jacobien. Calculer aussi le Jacobien de H.

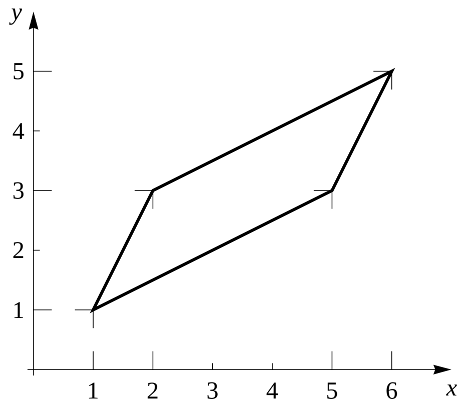
ii) Calculer l'aire du secteur circulaire $C_{R,\alpha}$ de rayon $R > 0$ et d'angle α par une intégrale double.

iii) Calculer l'aire de la région

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, \quad (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Exercice 7. (Comparaison de méthodes)

Calculer l'aire du parallélogramme représenté ci-dessous d'abord sans et ensuite avec changement de variables. Un changement de variables vous semble-t-il utile dans ce cas?



****

Exercice 8. (Méthodes de démonstration)

Pour chacune des propositions suivantes, choisissez la méthode convenable. Démontrez la proposition. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit $n \geq 2$ un nombre naturel qui n'est pas premier. Alors n admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

ii) Soit M l'ensemble des nombres naturels qui s'écrivent en utilisant seulement les chiffres 0 et 2. Par exemple, $20, 22, 202, 2222000 \in M$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $m \in M$ divisible par n.

iii) Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

iv) Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Lucas: $l_0 = 2, l_1 = 1$, et $l_{n+2} = l_n + l_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}:\ n \leq m$ on a

$$f_m f_n = \frac{1}{5}\left(l_{m+n} - (-1)^n l_{m-n}\right).$$