Anna Lachowska
15 mai 2025

Analyse II – Série 12

Exercice 1. (Plan tangent)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $xz^2 - 2x^2y + y^2z = 0$ aux points de la forme $(1, 1, z_0)$.

Exercice 2. (Extrema sous contraintes)

Trouver les valeurs maximale et minimale des fonctions suivantes sous les contraintes données.

i) $f(x, y) = x^3 + y^3, \quad x^4 + y^4 = 32$

ii) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x - y = 1$

Exercice 3. (Extrema sous contraintes)

Trouver les points où la fonction $f(x, y, z) = z$ est maximale et minimale sur la surface $4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz - 4x = 1$.

Exercice 4. (Extrema absolus)

i) Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$ sur le disque fermé $x^2 + y^2 \leq 32$.
Comparer les résultats avec l'Ex. 3 *ii)* de la Série 11.

ii) Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - \frac{5}{4}$ sur la boule fermée $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Exercice 5. (Application à la géométrie I)

i) Déterminer parmi les triangles rectangles ayant la même aire A, celui qui a la plus petite hypothénuse.

ii) Le cône $z^2 = x^2 + y^2$ est coupé par le plan $z = 1 + x + y$. Trouver le point qui se trouve dans l'intersection du cône et du plan et qui est le plus près de l'origine.

Exercice 6. (Application à la géométrie II)

Trouver les axes de l'ellipse déterminée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et du plan d'équation $x + y + 2z = 2$.

Exercice 7. (Maximum sous contrainte)

Déterminer le rayon r et la hauteur h qui maximisent le volume $V = \pi r^2 h$ d'un cylindre de surface $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ donnée.

Ex. 8 au verso.

****

Exercice 8. (Méthodes de démonstration)

Pour chacune des propositions suivantes, choisissez la méthode convenable. Démontrez la proposition. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$-6 \leq |x+5| - |x-1| \leq 6$$

ii) Nicolas a 10 poches et 44 pièces de monnaie. Il veut mettre ses pièces dans ses poches en les répartissant de telle sorte que chaque poche contienne un nombre différent de pièces. Peut-il le faire? Démontrez votre réponse.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que son reste de division par 4 est 2 ou 3. Alors n n'est pas un carré d'un nombre naturel.

iv) Parmi 10 points situés à l'intérieur d'un triangle équilatéral de côté 3, il en existe au moins deux tels que la distance entre eux est inférieure à 1.

v) Le nombre des sous-ensembles d'un ensemble de $n \geq 1$ éléments est 2^n.

vi) Soit A un ensemble de $n \geq 1$ éléments. Le nombre des sous-ensembles de A contenant un nombre pair d'éléments est 2^{n-1}.