Anna Lachowska

Analyse II – Série 11

Exercice 1. (Extremums, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

i) $f(x,y) = 2 + 3y^2 + \cos(x)$

ii) $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

iii) $f(x,y) = -3x^2 + xy^2 - y^4$

Exercice 2. (Extremums, $\mathbb{R}^3$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

i) $f(x,y,z) = -2x^2 - 5y^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 2$

ii) $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 4$

Exercice 3. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les extremums absolus de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

i) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$, où $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}$

ii) $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$, où $D = \{(x,y) : y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 32\}$

Indication: Le polynôme qui apparaîtra admet aussi des racines entières.

Exercice 4. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^3$)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z + 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x + 2\,.$$

Déterminer les extremums absolus de f sur le domaine

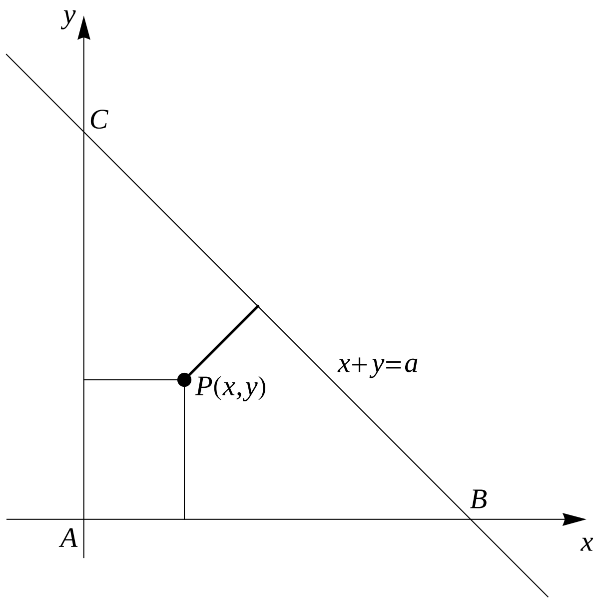
$$D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c\}\,, \qquad \text{où } a,b,c > 0\,,$$

sachant que $f(0,0,0) = 3$.

Exercice 5. (Application à la géométrie)

Trouver le point $P(x,y)$ à l'intérieur du triangle ABC pour lequel le produit des distances aux droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $x + y = a$ $(a > 0)$ est maximale.

Ex. 6, 7 et 8 au verso.



Exercice 6. (Fonctions implicites)

Vérifier que l'équation $F(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 et calculer la dérivée $f'(0)$.

i) $F(x, y) = 2x^3 - x^2y^4 + 2y^3 + 3x - 2$

ii) $F(x, y) = xe^y + ye^x + 2$

****

Exercice 7. (Cyclicité de la trace)

Démontrez les propositions suivantes. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit $n \geq 2$ et A, B deux matrices $n \times n$ réelles. Démontrez que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

ii) Soient A, B, C trois matrices 2×2 réelles. Démontrez par contre-exemple qu'en général $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(BAC)$.

iii) Soit $n \geq 2$ et A, B, C trois matrices $n \times n$ réelles. Démontrez que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.

Exercice 8. (Critère de Sylvester, $n = 2$.)

Soit

$$M = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

une matrice symétrique réelle, et λ_1, λ_2 ses valeurs propres. On a démontré au cours 19 que

i) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det M > 0, r > 0$.

ii) λ_1 et λ_2 sont de signes opposés $\Leftrightarrow \det M < 0$.

Démontrez la propositions suivante: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det M > 0, r < 0$.