EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
May 1 2025

Analyse II – Série 10

Exercice 1. (Approximation de Taylor dans $\mathbb{R}^3$)

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, une fonction de classe C^2 et soit $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Donner les développements limités *i*) linéaire et *ii*) quadratique de f au voisinage de (x_0, y_0, z_0).

Exercice 2. (Approximation de Taylor)

Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f au voisinage du point donné.

i) $f(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1\,,$ $\quad n = 2,$ $\quad (x_0, y_0) = (0,0)$

ii) $f(x,y,z) = e^x + y\sinh(z)\,,$ $\quad n = 2,$ $\quad (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

iii) $f(x,y) = 3xy + x^2 - y + 5x - 3\,,$ $\quad n = 1,$ $\quad (x_0, y_0) = (1,-2)$

iv) $f(x,y) = \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}+\sin(y)}\,,$ $\quad n = 1,$ $\quad (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

Pour *i*), vérifier que l'erreur $R(x,y)$ satisfait $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{||(x,y)||^2} = 0$.

Exercice 3. (Approximation de Taylor, méthode DL)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction composée $f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}))$ telle que $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une seule variable, et $h(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un polynôme, alors pour trouver le développement limité de f autour du point $\bar{a}$ il est convenable d'utiliser le développement limité de la fonction $g = g(t)$ autour du point $t_0 = h(\bar{a})$, et puis de remplacer $t = h(\bar{x})$.
Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction f au voisinage du point donné par la formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables et par la méthode DL, et comparer les résultats.

i) $f(x,y,z) = e^{2xz+y}\,,$ $\quad (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

ii) $f(x,y) = \sin(2x + y^2)\,,$ $\quad (x_0, y_0) = (1,1)$

Exercice 4. (Points stationnaires)

Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données ci-dessous, étudier la nature du point stationnaire $(0,0)$.
Astuce: si le déterminant de la matrice hessienne est zéro, essayer de déterminer la nature du point stationnaire à partir de la définition du maximum (minimum) local.

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad$ *ii*) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad$ *iii*) $f(x,y) = -x^2 + y^2$

iv) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ $\quad$ *v*) $f(x,y) = x^4 + y^4$ $\quad$ *vi*) $f(x,y) = x^4 - y^4$

vii) $f(x,y) = x^3 + y^3$ $\quad$ *viii*) $f(x,y) = -x^4 - y^4$

Exercice 5. (Points stationnaires des fonctions de 2 variables)

i) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ex. 6 et 7 au verso.

ii) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + \frac{3}{2}y^2$. Vérifier que $(0,0)$ est le seul point stationnaire de f et que la matrice hessienne de f au point $(0,0)$ est donnée par la matrice A dans *i)*. Quelle est la nature du point stationnaire $(0,0)$?

iii) Soit $(u,v)^T = O^T(x,y)^T$ le changement de variables effectué par la matrice orthogonale O des vecteurs propres de A trouvée dans *i)*. Exprimer la fonction $f(x,y)$ par rapport aux variables (u,v) et déduire la nature de son point stationnaire $(0,0)$.

iv) Calculer les coordonnées $(u,v)^T = O^T(x,y)^T$ correspondant aux vecteurs propres de la matrice hessienne pour la fonction $f(x,y) = 4xy$ autour de son unique point stationnaire et en déduire sa nature.

****

Démontrez les propositions suivantes. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

Exercice 6. (Nombres de Fibonacci, méthode carrée)

Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Démontrer par la méthode carrée que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$f_{m+n+1} = f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1}.$$

ii) Utiliser (a) pour démontrer que pour tout $t \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ on a

$$f_{(t+1)k} = f_{tk+1} f_k + f_{tk} f_{k-1}$$

En déduire que f_k divise f_{tk} pour tout $k \geq 1$, $t \geq 1$.

Exercice 7. (Nombres de Fibonacci, méthode diagonale). Démontrez la même proposition par la méthode diagonale suivant les étapes indiquées.
Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$f_{m+n+1} = f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1}.$$

i) Démontrez que $P(n,0)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) Démontrez que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ $P(n+1,m)$ implique $P(n,m+1)$.

iii) En déduisez que $P(n,m)$ est vraie pour tout $n, m \in N$.