EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
10 avril 2025

Analyse II – Série 8

Exercice 1. (Dérivée directionnelle et dérivabilité)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et soit $\bar{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ un vecteur unitaire.

i) Calculer $Df((0,0), \bar{e})$.
ii) La fonction $f(x,y)$ est-elle dérivable en $(0,0)$?

Exercice 2. (Dérivée directionnelle)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et soit $\bar{e} = (u, v)$ un vecteur unitaire. Calculer $Df((0,0), \bar{e})$.

Exercice 3. (Pente extrémale)

Soit la fonction $f(x,y,z) = xyz$ et soit le point $p_0 = (1, -1, 2)$.

i) Trouver la dérivée directionnelle de f en p_0 suivant le vecteur $\bar{v} = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$.

ii) Soit $\bar{u}$ un vecteur unitaire exprimé en coordonnées sphériques, c.-à-d.

$$\bar{u} = \big(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\big).$$

Calculer la pente de f en p_0 suivant le vecteur $\bar{u}$ en fonction de (θ, φ).

iii) Trouver les valeurs de θ et φ pour lesquelles la pente de f en p_0 est maximale (respectivement minimale).

Exercice 4. (Deuxièmes dérivées partielles)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Ex. 5, 6, 7 et 8 au verso.

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. (Dérivée en chaîne)

Calculer la dérivée de la fonction

$$f :]1, \infty[\mapsto \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) = \ln(t)^{\sin(t)}$$

i) comme dérivée de la fonction d'une seule variable

ii) en utilisant que $f(t) = (g \circ h)(t)$ avec $g(x,y) = x^y$ et $h(t) = (\ln(t), \sin(t))$.

Exercice 6. (Matrice jacobienne d'une fonction composée)

i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (xy,\ x-y)^T$. Trouver la matrice jacobienne de la fonction composée $f \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

ii) Soient $g : \mathbb{R}^2 \to R^3$ donnée par $g(x,y) = (ye^x,\ xe^y,\ \sin(x-y))^T$,
et $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $h(u,v,w) = (uw,\ w^2 - v)^T$.
Trouver les matrices jacobiennes des fonctions composées $J_{h \circ g}(x,y)$ et $J_{g \circ h}(u,v,w)$.
Quel est le determinant de la matrice $J_{g \circ h}(u,v,w)$?

****

Exercice 7. (Démonstrations par récurrence)

Démontrez les propositions suivantes par récurrence. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soient $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ les nombres de Fibonacci: $f_1 = f_2 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \geq 2$ naturel, le nombre de Fibonacci f_n est égal au nombre des suites de 1's et 2's telles que la somme d'éléments de chaque suite est $(n-1)$.
Exemple: $n = 5$. Les suites avec $a_i \in \{1,2\}$ telles que la somme $\sum_i a_i = 4$ sont les suivantes:

$$\{1,1,1,1\},\ \ \{1,1,2\},\ \ \{1,2,1\},\ \ \{2,1,1\},\ \ \{2,2\}.$$

Le nombre des suites satisfaisant les conditions est $5 = f_5$.

ii) (Récurrence forte). Tout nombre naturel positif $n \geq 1$ est une somme des puissances *distinctes* de 2:

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots 2^{k_p},$$

où $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ sont des entiers naturels distincts. *Astuce: Pour construire la récurrence considérez le plus grand k naturel tel que $2^k \leq n+1$.*

Exercice 8. (Vrai /Faux /Peut-être)

Soit $P(n)$ une proposition telle que pour tout n naturel, $P(n)$ implique $P(n+3)$. Pour chaque des propositions suivantes, décidez si elle est *(a)* toujours vraie, *(b)* toujours fausse *(c)* peut être vraie ou fausse.

i) $P(0)$ est fausse et $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

ii) $P(n)$ est vraie pour tout $n < 80$ et fausse pour tout $n > 81$.

iii) $P(9)$ implique $P(3(n+3))$ pour tout n naturel.

iv) $P(n)$ est fausse pour tout $n \leq 66$ et vraie pour tout $n \geq 69$.

v) $P(3n)$ est vraie et $P(3n+1)$ est fausse pour tout n naturel.

vi) Il existe n, m naturels tels que $P(3n)$ est vraie et $P(3m)$ est fausse.