Anna Lachowska

Analyse II – Série 7

Exercice 1. (Dérivées partielles, dérivabilité)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin^4(x)}{x^4+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, si elles existent.

iii) Est-ce que f est dérivable en $(0,0)$?

Exercice 2. (Dérivabilité)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Montrer que f est dérivable en tout $(x,y) \neq (0,0)$.

iv) Montrer que f n'est pas dérivable en $(x,y) = (0,0)$.

v) Est-ce que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(x,y) = (0,0)$?

Exercice 3. (Dérivabilité)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2)\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est de classe C^1.

ii) Calculer les dérivées partielles secondes de f. Est-ce que f est de classe C^2 ?

iii) Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$?

Ex. 5, et 6 au verso.

iv) Calculer les dérivées directionnelles de f en $\bar{a} = (0,0)$ et $\bar{b} = (-1,1)$ suivant le vecteur $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{v} \neq \bar{0}$. Trouver tous les vecteurs unitaires $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $||\bar{v}|| = 1$ tels que $Df(\bar{a}, \bar{v}) = Df(\bar{b}, \bar{v}) = 0$.

Exercice 4. (Plan tangent)

i) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1,1,3)$.

ii) Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ où $f(x,y)$ est définie dans l'Exercice 3, au point $(-1, 1,\ f(-1,1))$.

iii) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et posons $f(x,y) = x\, g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Démontrer que pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 \neq 0$, le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ passe par l'origine $(0,0,0)$.

Exercice 5. (Questions vrai/faux)

Q01 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est dérivable en (x_0, y_0), alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent.

Q02 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si les dérivées directionnelles $D\, f((x_0, y_0), \bar{v})$ existent pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, alors f est dérivable en (x_0, y_0).

Q03 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si les dérivées directionnelles $D\, f((x,y), \bar{v})$ existent dans un voisinage de (x_0, y_0) et sont continues en (x_0, y_0) pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, alors f est dérivable en (x_0, y_0).

Q04 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent et sont continues dans un voisinage de (x_0, y_0), alors toutes les dérivées directionnnelles $D\, f((x,y), \bar{v})$ existent dans un voisinage de (x_0, y_0) et sont continues en (x_0, y_0) pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$.

Q05 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est dérivable en (x_0, y_0) et $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $||\bar{v}|| = 1$ est tel que $D\, f((x_0, y_0), \bar{v}) = ||\nabla f(x_0, y_0)||$, alors $\bar{v}$ est unique.

****

Exercice 6. (Démonstrations par récurrence)

Démontrez les propositions suivantes par récurrence. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1.$$

ii) Soit $a_n = 25^n - 19^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors a_n est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Supposons que dans un certain pays les seules monnaies en circulation sont de 3 et 5 centimes. Montrer que pour tout $n \geq 8$ naturel, il est possible de payer n centimes en utilisant des monnaies disponibles.