Anna Lachowska
27 mars 2025

Analyse II – Série 6

Exercice 1. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)$

ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

iii) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz+xz^2}{(x^2+y^2+z^2)}$

iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4-4\cos\sqrt{|x|+|y|}}{|x|+|y|}$

Exercice 2. (Continuité)

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0,0)$ des fonctions f dont l'expression pour $(x,y)\neq(0,0)$ est :

i) $f(x,y)=\dfrac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2}$

ii) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+(2|x|+|y|)^2}$

iii) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$

iv) $f(x,y)=xy\,\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Exercice 3. (Limites le long des droites)

Soit une fonction $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$, définie dans un voisinage de $(0,0)$ mais pas nécessairement en $(0,0)$. Supposons que pour tout $m\in\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t\to 0} f(t,mt)=l, \qquad l\in\mathbb{R}.$$

Peut-on conclure que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=l$? Trouver un argument pour la conclusion, ou donner un contre-exemple.

Exercice 4. (Questions vrai/faux)

Q01 : Soit une fonction $f\colon D\to\mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0)\in D$ où $D\subset\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert. Si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe, alors f est continue en (x_0,y_0).

Q02 : Soit une fonction f définie dans un voisinage de $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ (mais pas nécessairement en (x_0,y_0)). Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ existe, alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe.

Ex. 6 au verso.

Q03 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit une fonction $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi \in [0, 2\pi[$ telle que

$$\left|f\big(r\cos(\varphi_0), r\sin(\varphi_0)\big)\right| \leq g(r)$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

Exercice 5. (Dérivées partielles)

Préciser le domaine des fonctions f ci-dessous et calculer leurs dérivées partielles premières:

i) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

*ii)** $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$

iii) $f(x,y) = \sin(x^2y)\cosh(y-x)$

iv) $f(x,y,z) = \sinh\left(\dfrac{x+3yz}{z-2}\right)^2$

* Pour *ii)*, on cherche le plus grand sous-ensemble du domaine qui est ouvert dans $\mathbb{R}^3$.
Pour *i)*, calculer aussi les dérivées partielles d'ordre 2.

Exercice 6. (Gradient)

Soient $g, h\colon D \to \mathbb{R}$ de classe C^1, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Calculer le gradient ∇f où

i) $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$

ii) $f(x,y) = g(x,y)\,h(x,y)$

iii) $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$

****

Exercice 7. (Démonstrations en Analyse II: propriétés des fonctions continues)
Théorème: Une fonction continue sur un ensemble compact atteint son minimum et son maximum. Refaire la démonstration de ce théorème du cours suivant les étapes données.

i) Démontrer que si un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas borné, alors il existe une suite $\{u_k\} \subset S$ telle que $|u_k| > k$ pour tout k naturel positif.

ii) Utiliser (*i*) pour démontrer *par absurde* que si $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact et $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(E) \subset \mathbb{R}$ est un ensemble borné.

iii) Soit $P \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble borné. Utiliser la définition du supremum et de l'infimum de P (voir Analyse I) pour construire deux suites $\{x_k\} \subset P$ et $\{y_k\} \subset P$ telles que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \inf(P)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \sup(P)$.

iv) Utiliser (*iii*) en cas $P = f(E)$ pour montrer qu'il existe deux suites $\{\bar{a}_k\} \subset E, \{\bar{b}_k\} \subset E$ telles que $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{a}_k) = \inf(f(E))$ et $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{b}_k) = \sup(f(E))$.

v) Les suites $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$ sont-elles nécessairement convergentes?[1] Utiliser la propriété du sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^n$ pour démontrer l'existence des sous-suites convergentes dans $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$. Soient $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ leurs limites respectives.

[1]Essayer de trouver un contre-exemple

vi) Démontrer que si $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact, alors $\bar{a}, \bar{b}$ construits dans (v) appartiennent à E. Utiliser la propriété de la fonction continue f pour démontrer que $f(\bar{a}) = \inf(f(E))$ et $f(\bar{b}) = \sup(f(E))$.