EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
20 mars 2025

Analyse II – Série 5

Exercice 1. (L'adhérence)

Pour chaque sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, trouver son adhérence et sa frontière.

i) $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_i = 0, i = 2, \dots n\}$

ii) $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : ||\bar{x}|| < 2, ||\bar{x} - \bar{a}|| > 1, a \in \mathbb{R}^n\}$

iii) $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : x_1 \neq 1, \}$

Exercice 2. (QCM: Sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$)

Trouver le seul sous-ensemble compact parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants

a) $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : ||\bar{x}|| < 2, ||\bar{x} - \bar{a}|| > 1, a \in \mathbb{R}^n\}$

b) $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : x_1 \neq 1, ||\bar{x}|| \leq 5.\}$

c) $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : x_1 = 0, ||\bar{x}|| \leq 5\}$

d) $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_i = 0, i = 2, \dots n\}$

Exercice 3. (Ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé)

Pour chaque sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, déterminer s'il est
a) Ouvert,
b) Fermé,
c) Ni ouvert ni fermé.

i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt{(x+y)^2 - 5(x+y) + 6} < \sqrt{2}\}$

ii) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0, \; x < y < x^2\}$

Exercice 4. (VF: Sous-ensembles dans $\mathbb{R}^n$)

Soient $E, F, A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ trois sous-ensembles non vides avec les complémentaires non vides. Pour chaque des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse:

i) $\overline{E} \subset \overline{F} \implies E \subset F.$

ii) $E \subset F \implies E \setminus A \subset F \setminus A.$

iii) $E \subset F \implies A \setminus F \subset A \setminus E.$

iv) $\partial E \subset \partial F \implies E \subset F.$

Exercice 5. (Fonctions réelles des deux variables réelles)

Trouver l'image et esquisser le graphique des fonctions $f\colon [-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ suivantes :

i) $f(x,y)=1$ *ii)* $f(x,y)=x$ *iii)* $f(x,y)=y$ *iv)* $f(x,y)=x+y$

v) $f(x,y)=x-y$ *vi)* $f(x,y)=-x-y-1$ *vii)* $f(x,y)=x^2$

viii) $f(x,y)=x^2+y^2$

Exercice 6. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-3y}{x+2y^2}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-3y}{5|x|+2|y|}$ *iii)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Exercice 7. (Limites non-existantes)

Pour chaque limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\bar{x})$ trouver deux suites $\{\bar{a}_n\}$ et $\{\bar{b}_n\}$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ convergentes vers $(0,0)$ et telles que

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\bar{b}_n).$$

Conclure que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\bar{x})$ n'existe pas.

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2-yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ *ii)* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^5}{(x^4+y^6)^{3/2}}$ *iv)* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

****

Exercice 8. (Démonstrations directes: topologie dans $\mathbb{R}^n$)

Démontrez les propositions suivantes en utilisant les astuces données. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit $n,p\in\mathbb{N}^*$, et $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots\bar{a}_p$ les éléments distincts de $\mathbb{R}^n$.
Alors l'ensemble $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots\bar{a}_p\}\subset\mathbb{R}^n$ est compact.
Astuce: (a) Trouver $M>0$ tel que $A\subset\overline{B(\bar{0},M)}$, (b) Démontrer que A est réunion finie des sous-ensembles fermés.

ii) Soit $t\in[0,\pi]$ et $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x=\cos(t),\ y=\sin(t), z=t\}$. (Graphique d'une hélice circulaire).

(a) Démontrer que $[0,\pi]$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$. *Astuce: Utiliser la caractérisation d'un sous-ensemble fermé: $E\subset\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si E contient les limites des toutes les suites convergentes d'éléments de E.*

iii) Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1,\ x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Montrer que $\overline{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.
Astuce: Soit $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Montrer que tout $(a,b) \in S$ est la limite d'une suite d'éléments de E, et que toute suite convergente d'éléments de E converge vers un élément de S. Utiliser que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.