Anna Lachowska

Analyse II – Série 4

Exercice 1. (Méthode des coefficients indéterminés)

Pour chaque des équations suivantes, (1) donner les deux solutions linéairement indépendentes de l'équation associée homogène et (2) écrire un Ansatz (une expression contenant des polynômes avec des coefficients indéterminés) pour une solution particulère.

i) $y'' - 5y' + 6y = (3x^2 + 1)\cos(x)$

ii) $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$

iii) $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + 2x^2$

iv) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(\sin(x) + 1)$

v) $y'' - 4y' + 4y = e^x\cos(x) - e^x\sin(x)$

vi) $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x} - e^{2x}$

Pour l'équation (iv), trouver la solution particulière $y_p(x)$ satisfaisant les conditions initiales $y_p(0) = -\frac{1}{2}$, $y_p'(0) = \frac{1}{2}$ et calculer la valeur en $y_p(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 2. (Méthode de la variation des constantes)

Trouver la solution générale de l'équation $y'' + y = \tan(x)$.

i) Trouver une solution particulière par la méthode de la variation des constantes.

ii) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction obtenue. Determiner les intervalles où la fonction obtenue est de classe C^2.

iii) Trouver la solution maximale de l'équation $y'' + y = \tan(x)$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exercice 3. (Equation à coefficients variables)

Trouver la solution générale $y :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$x^2y'' + 3xy' + y = 2 + x^2 \ .$$

i) Première méthode : ramener cette équation différentielle à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants par le changement de variable $x = e^t$.

ii) Deuxième méthode : utiliser que $v_1(x) = \frac{1}{x}$ est une solution de l'équation associée homogène.

Ex. 4 et 5 au verso.

Exercice 4. (QCM: Sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$)

Pour chaque sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, déterminer s'il est

a) Ouvert,

b) Fermé,

c) Ni ouvert ni fermé.

i) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_1 + x_2 > 0\}$

ii) $E = \{x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : ||x|| \leq \pi\}$

iii) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_1 > 0, x_2 \neq 0\}$

iv) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_1 > 0, x_2 \leq 0\}$

v) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3 : x_1 = 0, x_2 \neq x_3\}$

vi) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_1 = 2, x_2 = -2\}$

vii) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \ldots n\}$

viii) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_1 > 0, ||x|| < 1\}$

****

Exercice 5. (Démonstration par le principe des tiroirs)

Démontrez les propositions suivantes par le principe des tiroirs. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit S un ensemble de 100 nombres entiers. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble $P \subset S$ de 12 nombres tels que pour tout couple $a, b \in P$, la différence $a - b$ est divisible par 9.

ii) Parmi tous les 8 points situés sur le cercle de rayon 1, il existe au moins deux tels que la distance entre eux est inférieure à 1. *Astuce: La longueur d'un arc circulaire de rayon r et d'angle ϕ est ϕr.*

iii) Démontrer par le principe des tiroirs que parmi cinq nombres naturels positifs distincts donnés n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 on peut toujours trouver deux nombres distincts n_t, n_s, tels que le nombre $n_t^2 - n_s^2$ soit divisible par 12. *Astuce: considérer d'abord la divisibilité par 4, et puis par 3.*