Anna Lachowska

Analyse II – Série 3

Exercice 1. (EDL2 homogènes à coefficients constants)

Quelles sont les solutions générales des équations différentielles suivantes ?

i) $y'' = 1$ *ii)* $y'' + y = 0$ *iii)* $y'' - y = 0$ *iv)* $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 2. (EDL2 homogènes à coefficients constants)

Résoudre l'équation différentielle

$$3y'' - 4y' + my = 0$$

pour les valeurs indiquées du paramètre m.

i) $m = 1$ *ii)* $m = 2$ *iii)* $m = \frac{4}{3}$

Exercice 3. (EDL2 à coefficients constants)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

i) $y'' + 4y = 3e^{2x}$ *ii)* $y'' + 4y = 5\cos(2x)$ *iii)* $y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}$

Exercice 4. (Problème de Cauchy)

i) Déterminer la solution générale de l'équation suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = 0\,.$$

ii) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = 5\sin(3x)\ . \tag{1}$$

iii) Donner la solution de (1) pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 5. (QCM: types des équations différentielles)

1. Déterminer le type des équations différentielles suivantes.

(a) Équation différentielle à variables séparées (EDVS)
(b) Équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)
(c) Équation différentielle linéaire du second ordre (EDL2)
(d) Aucune de ces réponses

i) $y' = y\tan(x) + \cos(x)$ *ii)* $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$ *iii)* $y'\tan(x) = 2y$

iv) $y'' + e^x y' - 3x = xy$ *v)* $\cos(x)y' = 5\sin(x)$ *vi)* $y' = (x+y)^2$

Ex. 6 et 7 au verso.

$vii)\ xy' - y = y^3$ $\qquad$ $viii)\ xy' + y - e^x = 0$ $\qquad$ $ix)\ y'' + \dfrac{2}{x} y' = -y$ $\qquad$ $x)\ y' = e^{\frac{2y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

Dans chaque cas, donner le type le plus facile qui s'applique: par exemple, si une équation est linéaire du premier ordre à variables séparées, il faut choisir "équation à variables séparées" comme réponse.
2. Dans les cas où vous avez choisi (d), essayer de trouver un changement des variables qui transforme l'équation en un de types $(a), (b), (c)$.

Exercice 6. (Equation de Riccati)

Considérons l'équation différentielle de Riccati $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$.

$i)$ Soit y_1 une solution particulière de cette équation différentielle et posons $y = y_1 + \frac{1}{u}$. Montrer que si y est aussi une solution, alors u satisfait l'EDL1 suivante:

$$u' + (2ay_1 + b)u = -a \ .$$

$ii)$ Utiliser l'indication $i)$ pour résoudre l'équation différentielle de Riccati

$$3\,x\,y' + 4\,y^2 - 4 = 0 \ .$$

****

Exercice 7. (Démonstration par absurde)

Démontrer les propositions suivantes par absurde. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

$i)$ $\sqrt{8}$ est irrationnel.

$ii)$ $\sqrt{37} + \sqrt{18}$ est irrationnel. *Astuce: considérer l'expression* $(\sqrt{37} + \sqrt{18})(\sqrt{37} - \sqrt{18})$.

$iii)$ Soit (x_n) une suite convergente de nombres réels, telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Supposons qu'ils existent des nombres $a < b \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $a < x_n < b$. Alors $a \leq x \leq b$.