Anna Lachowska
27 février 2025

Analyse II – Série 2

Exercice 1. (EDVS: solutions générales)

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

i) $y' = y - 2$ *ii)* $y' = -xy$ *iii)* $y' + \frac{3}{x}\,y = 0$

Exercice 2. (EDVS: problème de Cauchy)

Pour chacune des équations différentielles ci-dessous, trouver la solution maximale pour la condition initiale donnée.

i)	$x(3x+4) - 6(y-1)^2\,y' = 0$	$y(0) = 0$
ii)	$y\,y' - e^{y^2-4x} = 0$	$y(0) = \sqrt{\ln(2)}$
iii)	$x\,y' - y = y^3$	$y(1) = -1$

Exercice 3. (Equations différentielles linéaires du premier ordre: EDL1)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous pour les conditions initiales données.

i)	$y' - y\sin(x) = 4\sin(x)\,e^{\cos(x)}$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
ii)	$xy' - y - 4x\ln(x) = 0$	$y(1) = 1$
iii)	$y' - 3y = 10\cos(x) + 2e^{3x}$	$y(0) = 0$
iv)	$y' + y = x^3$	$y(0) = -2$
v)	$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$	$y(1) = 0$

Exercice 4. (EDVS: solutions maximales)

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$x(x-1)y' - y(y-1) = 0$$

et dessiner le graphique des solutions maximales pour les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ suivantes :

x_0	-1	-1	2	2
y_0	-1	1	4	-4

****

Ex. 5 et 6 au verso.

Exercice 5. (Disjonction des cas)

Démontrer les propositions suivantes par disjonction des cas. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soient n un nombre entier qui n'est pas divisible par 5. Alors le nombre $n^4 + 14$ est divisible par 5.

ii) Soient x, y, z, v des nombres naturels tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2.$$

Alors v est pair si et seulement si tous les trois nombres x, y, z sont pairs.

Exercice 6. (Implications)

Dans les énoncés suivants remplacer "??" par une des implications $\Leftarrow, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ pour obtenir des propositions vraies. Démontrer les propositions obtenues.

i) On considère l'équation $x^2 + ax + b = 0$, où $a, b \in \mathbb{C}$.
Proposition P : *il existe* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* z *et* $\overline{z}$ *sont les seules solutions de l'équation donnée.*
Proposition Q : *Les nombres* a *et* b *sont réels.*
$P \quad ?? \quad Q$

ii) Soient A, B deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$.
$A = B \quad ?? \quad A \setminus B = B \setminus A$