EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
20 février 2025

Analyse II – Série 1

Exercice 1. (Intégration)

Quelle est la solution générale de chacune des équations suivantes?

i) $y' = 2x$ *ii)* $y'' = a$, où $a \in \mathbb{R}$ *iii)* $y'' = 3\sin x$

Exercice 2. (Séparation des variables)

Trouver la solution générale de chacune des équations suivantes :

i) $y' = \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ *ii)* $y' = 2y(5-y)$ *iii)* $y' = \sqrt{y^2+1}$

iv) $y' = y + 1$, *v)* $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ *vi)* $xy' - y = y^3$.

Exercice 3. (Intégration: conditions initiales, solutions maximales)

Pour les équations différentielles données trouver (a) la solution générale et (b) la solution maximale satisfaisant les conditions initiales données.

i) $y' = 2e^x - 4x + 1$, condition initiale $y(1) = 2e$.

ii) $y'' = \sin x \cos x$, conditions initiales $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y(0) = 1$

iii) $y'' = \sin x \cos x$, conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 4. (Séparation des variables: conditions initiales, solutions maximales)

Pour les équations différentielles données trouver (a) la solution générale et (b) la solution maximale satisfaisant les conditions initiales données, si une telle solution existe.

i) $\dfrac{y'}{y^2} = \sin x$, condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$.

ii) $yy' = 1$, condition initiale $y(0) = 0$.

iii) $yy' = x$, condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 5. (Equation linéaire à coefficients constants)

i) Vérifier que pour $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les fonctions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0\,. \tag{1}$$

ii) Quelle est la solution générale de (1) pour $\omega = 0$?

iii) Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, donner les valeurs de C_1 et C_2 pour les conditions initiales $y(1) = 3$ et $y'(1) = 2$.

Ex. 6, 7 et 8 au verso.

Exercice 6.

Vérifier que les fonctions y données ci-dessous satisfont l'équation

$$y' \, \frac{2y(x-1)}{y^2+1} + \log(y^2+1) = 0 \ .$$

i) $y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ii) $y(x) = \pm\sqrt{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)} - 1}$, pour, respectivement, $x > 1$ et $C > 0$, ou $x < 1$ et $C < 0$.
Déterminer la valeur de C pour chacune des conditions initiales $y(2) = -3$ et $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$.

****

Exercice 7. (Démonstration directe)

Démontrer les propositions suivantes. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq 2$. Alors $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}_+$. Alors $\log_{11} n$ est un entier ou un nombre irrationnel.
Astuce: Utiliser le théorème fondamental de l'arithmétique: tout entier positif possède une unique décomposition en produit de facteurs premiers, à l'ordre près des facteurs.

Exercice 8. (Faux arguments)

Trouver les fautes dans les arguments suivants:

i) Soit $S = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$. Alors on a

$$S = 1-1+1-1+1-1+\ldots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}((-1)^{2i}+(-1)^{2i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Donc la série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$ converge vers 0.

ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a = b$, alors $a = 0$:

$$a = b \quad \Rightarrow \quad a^2 = ab \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \Rightarrow \quad (a-b)(a+b) = (a-b)b$$
$$\Rightarrow \quad a + b = b \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

iii) Soient P, Q, R des propositions tels que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$, et R est une proposition vraie. Alors P est vraie.

Astuce: Est-ce possible de dériver une conclusion vraie d'une proposition fausse? Essayez de dériver une conclusion vraie de la proposition "$\sqrt{3}$ est un nombre rationnel".