

## Analyse II

Résumé: Calcul intégral des fonctions des plusieurs variables.

### Définitions et résultats.

1. Un pavé fermé  $P \subset \mathbb{R}^n$  est un produit cartésien de  $n$  intervalles fermés bornés

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

2. Une subdivision  $D(\sigma)$  d'un pavé fermé  $P$  est un décomposition de  $P$  en pavés plus petits engendrée par la subdivision de chaque intervalle  $[a_i, b_i]$  en sous-intervalles.
3. (Sommes de Darboux). Soit  $P \subset \mathbb{R}^n$  un pavé fermé et  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. Soit  $D(\sigma)$  une subdivision de  $P$ . On pose

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)|Q|, \quad \overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)|Q|,$$

où  $m(Q)$  est l'infimum et  $M(Q)$  le supremum de  $f$  sur le pavé  $Q$ , et  $|Q|$  est le volume de  $Q$ . Alors on définit les sommes de Darboux de  $f$  comme

$$\underline{S}(f) = \sup(\underline{S}_\sigma(f)), \quad \overline{S}(f) = \inf(\overline{S}_\sigma(f))$$

où le supremum et l'infimum sont calculés par rapport aux toutes les subdivisions de  $P$ .

4. (Intégrale de Riemann). Soit  $P \subset \mathbb{R}^n$  un pavé fermé et  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée sur  $P$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $P$  si et seulement si  $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ . Dans ce cas l'intégrale de  $f$  sur  $P$  est définie par

$$\int_P f(\bar{x}) d\bar{x} = \underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

5. (Théorème de Fubini pour les pavés). Soit  $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ , et  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est intégrable sur  $P$  et on a

$$\int_P f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left( \dots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x}) dx_1 \right) \dots dx_{n-1} \right) dx_n \right).$$

6. (Théorème de Fubini pour les pavés, cas  $n = 2$ ). Soit  $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ , et  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est intégrable sur  $P$  et on a

$$\int_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

7. (Intégrale sur un sous-ensemble borné). Soit  $E \subset P \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble borné. Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée, et posons

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \bar{x} \in E \\ 0 & \bar{x} \in P \setminus E \end{cases}$$

La fonction  $f$  est intégrable sur  $E$  si  $\hat{f}$  est intégrable sur  $P$  et on pose

$$\int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_P \hat{f}(\bar{x}) d\bar{x}.$$

8. Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble compact telle que la frontière  $\partial E$  est assez régulière (de mesure nulle), et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borné et continue sur  $E$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $E$ .

9. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers verticaux, cas  $n = 2$ ). Soit  $[a, b] \in \mathbb{R}$  un intervalle fermé, et  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues telles que  $\phi_1(x) < \phi_2(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$ . Alors pour toute fonction continue  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

10. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers horizontaux, cas  $n = 2$ ). Soit  $[c, d] \in \mathbb{R}$  un intervalle fermé, et  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues telles que  $\psi_1(y) < \psi_2(y)$  pour tout  $y \in ]c, d[$ . Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$ . Alors pour toute fonction continue  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

11. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers, cas  $n = 3$ ). Soit  $[a, b] \in \mathbb{R}$  un intervalle fermé, et  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues telles que  $\phi_1(x) < \phi_2(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$ . Soient  $G, H : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que  $G(x, y) < H(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in D$ . Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, G(x, y) < z < H(x, y)\}$ . Alors pour toute fonction continue  $f : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left( \int_{G(x, y)}^{H(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Selon la géométrie du domaine, on applique le Théorème de Fubini aux variables convenables.

12. (Additivité de l'intégrale). Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine compact à frontière régulière, et  $\{D_i\}_{i=1}^k$  une famille finie des domaines réguliers disjoints tels que  $D = \bigcup_i D_i$ . Alors pour toute fonction continue  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

13. (Linéarité de l'intégrale). Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine régulier, et  $f, g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. Alors pour tout couple des nombres réels  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_D (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x})) d\bar{x} = \alpha \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} + \beta \int_D g(\bar{x}) d\bar{x}.$$

14. (Bornes pour une intégrale). Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine régulier, et  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $0 \leq m \leq f(\bar{x}) \leq M$  pour tout  $\bar{x} \in D$ . Alors on a les inégalités :

$$m|D| = m \int_D d\bar{x} \leq \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} \leq M \int_D d\bar{x} = M|D|,$$

où  $|D|$  est le volume du domaine  $D$ .

15. (Changement des variables). Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un domaine régulier et  $G : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $G : E \rightarrow G(E)$  est bijective et  $J_G(\bar{x})$  inversible pour  $\bar{x} \in E$ . Soit  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, où  $D = G(E)$ . Alors on a

$$\int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_E f(G(\bar{u})) |\det(J_G(\bar{u}))| d\bar{u}.$$

16. (Changement des variables, coordonnées polaires). Soit  $G(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T$ . Alors pour toute fonction continue  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  sur un domaine régulier  $D \subset \mathbb{R}^2$  on a

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{G^{-1}(D)} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r dr d\varphi.$$

17. (Coordonnées sphériques). Soit

$$G(r, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) &= x \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) &= y \\ r \cos(\vartheta) &= z \end{cases}$$

Alors  $|\det(J_G(r, \vartheta, \varphi))| = r^2 \sin(\vartheta)$ .

18. (Coordonnées cylindriques). Soit

$$G(r, \varphi, z) = \begin{cases} r \cos(\varphi) &= x \\ r \sin(\varphi) &= y \\ z &= z \end{cases}$$

Alors  $|\det(J_G(r, \varphi, z))| = r$ .