EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
mars 2025

Analyse II
Résumé: Espace $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

1. $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des tous les n-tuples ordonnés $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ des nombres réels muni des opérations suivantes:
   (a) l'addition vectorielle : $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$,
   $$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n)$$
   (b) la multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n).$$
   (c) le produit scalaire
   $$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
   (d) la norme euclidienne
   $$||\bar{x}|| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

   Donc $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

2. Propriétés de la norme euclidienne:
   (a) $||\bar{x}|| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = (0, 0, \ldots 0)$
   (b) $||\lambda \cdot \bar{x}|| = |\lambda| \cdot ||\bar{x}||$ pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
   (c) Cauchy-Schwartz: pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
   $$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq ||\bar{x}|| \cdot ||\bar{y}||$$
   (d) L'inégalité triangulaire: pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
   $$||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$$
   (e) L'inégalité triangulaire inverse: pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
   $$||\bar{x} - \bar{y}|| \geq |\ ||\bar{x}|| - ||\bar{y}||\ |$$

Topologie dans $\mathbb{R}^n$.

1. Boule ouverte: Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, l'ensemble $B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : ||\bar{y} - \bar{x}|| < \delta\}$ est appelé *la boule ouverte* de centre $\bar{x}$ et de rayon δ.

2. $\bar{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$ est *un point intérieur* du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset E$. L'ensemble des points intérieurs de E est appelé *l'intérieur* de E et noté $\mathring{E}$.

3. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ si tout point de E est un point intérieur. ($\Leftrightarrow E = \mathring{E}$). L'ensemble vide $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert par la définition.

4. Toute réunion de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Alors E est *fermé* si son complémentaire $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ est ouvert.

6. Toute intersection de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Toute réunion finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

7. Les seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.

8. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide. Alors l'intersection de tous les fermés contenant E est appelée *l'adhérence* de E et notée $\bar{E}$. Pour tout sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, on a $\mathring{E} \subset E \subset \bar{E}$.

9. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\Leftrightarrow E = \bar{E}$.

10. Un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est *un point frontière* de $E \subset \mathbb{R}^n : E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}^n$ si toute boule ouverte de centre $\bar{x}$ contient au moins un point de E et au moins un point de CE. L'ensemble des points frontières de E est *la frontière* de E, notée ∂E.

11. Soit $E \subset \mathbb{R}^n : E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}^n$. Propriétés de la frontière:
    (a) $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$
    (b) $\mathring{E} \cup \partial E = \bar{E}$
    (c) $\bar{E} \setminus \mathring{E} = \partial E$.
    (d) $\partial E = \bar{E} \cap C\mathring{E}$, donc ∂E est un sous-ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$.

12. Une *suite* d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$,
$$f : k \to \bar{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots x_{n,k}) \in \mathbb{R}^n.$$
Notation: $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$.

13. Une suite $\{\bar{x}_k\}$ est *convergente* et admet pour limite $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on a $||\bar{x}_k - \bar{x}|| \leq \varepsilon$. Notation:
$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}.$$

14. La limite d'une suite $\{\bar{x}_k\}$, si elle existe, est unique.

15. Une suite $\{\bar{x}_k\}$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que $||\bar{x}_k|| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

16. Toute suite convergente d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est bornée.

17. (Théorème Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée $\{\bar{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.

18. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si est seulement si toute suite $\{\bar{x}_k\} \subset E$ qui converge, converge vers un élément de E.

19. Pour obtenir l'adhérence d'un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit d'ajouter à E les limites des toutes suites convergentes d'éléments de E.

20. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est *borné* s'il existe $M > 0$ tel que $||\bar{x}|| \leq M$ pour tout $\bar{x} \in E$.

21. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est *compact* s'il est à la fois fermé et borné.

22. (Théorème Heine-Borel-Lebesgue) Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si est seulement si de tout recouvrement de E par des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

$$E \subset \cup_{i \in I} A_i, \qquad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert } \forall i \in I$$

on peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de E:

$$E \subset \cup_{j=1}^{m} A_{i_j}, \qquad i_j \in I \quad \forall j = 1, \dots m.$$