EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
mars 2025

Analyse II

Résumé: Équations différentielles ordinaires.

Définitions.

1. Une *équation différentielle ordinaire* est une expression
$$E(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$$
où $E : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, $n \in \mathbb{N}_+$. On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction de classe C^n telle que l'équation soit satisfaite pour tout $x \in I$.

2. *L'ordre* de l'équation différentielle est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ qui apparaît dans l'équation.

3. *La solution générale* d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation.

4. Problème de Cauchy: résoudre l'équation $E(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$ et trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y(x) : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$ telle que *les conditions initiales* $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = b_0$, etc. sont satisfaites. Le nombre et caractère des conditions initiales dépend du type de l'équation.

5. *La solution maximale* du problème de Cauchy est la solution définie sur le plus grand intervalle possible.

Méthodes de résolution des certains types des équations différentielles.

1. Équation différentielle à variables séparées du premier ordre (EDVS):
$$f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$
où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I, et $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur J.

2. (Existence et unicité d'une solution de EDVS avec la condition initiale donnée).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0$ sur I, et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $x_0 \in J$, $b_0 \in I$, l'équation
$$f(y)y'(x) = g(x)$$
admet une solution $y : J' \to I$, $J' \subset J$ vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = b_0$. Si $y_1 : J_1 \to I$ et $y_2 : J_2 \to I$ sont deux solutions telle que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$.

3. Pour résoudre une EDVS:
$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$
où $\int g(x)\,dx$ est la primitive générale. La solution de cette équation pour $y = y(x)$ donne la solution générale de l'EDVS.

4. Équation différentielle linéaire du priemier ordre (EDL1): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation
$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x),$$
où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation
$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0,$$
où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, est une équation différentielle linéaire du premier ordre *homogène*.

6. Soit $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$ une EDL1 homogène. Alors la fonction $y : I \to \mathbb{R}$,
$$y(x) = Ce^{-P(x)},$$
où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I, est la solution générale de cette équation pour tout $C \in \mathbb{R}$.

7. Principe de superposition des solutions pour EDL1: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $p, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_1 : I \to \mathbb{R}$ et $v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions des équations $y' + p(x)y = f_1(x)$ et $y' + p(x)y = f_2(x)$, respectivement. Alors la fonction
$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)$$
est une solution particulière de l'équation $y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

8. Méthode de la variation des constantes pour EDL1: Une solution particulère de l'équation $y' + p(x)y = f(x)$ est la fonction $v : I \to \mathbb{R}$:
$$v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}\,dx\right) \cdot e^{-P(x)}$$
où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

9. Solution générale de l'EDL1: Soient $f, p : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors la solution générale de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est
$$v(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = Ce^{-P(x)} + \left(\int f(x)e^{P(x)}\,dx\right) \cdot e^{-P(x)},$$
où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

10. Équation différentielle linéaire du second ordre (EDL2): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation différentielle de la forme
$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$
où $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, est dite une équation différentielle linéaire du second ordre (EDL2).

11. Équation différentielle linéaire du second ordre *homogène* est une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

où $p, q : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

12. Équation différentielle linéaire du second ordre homogène *à coefficients constants* est une équation de la forme

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0,$$

où p, q sont des nombres réels.

13. Soit $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$, une EDL2 (hom) à coefficients constants $p, q \in \mathbb{R}$, et supposons que a, b sont des solutions de l'équation caractéristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Alors sa solution générale pour tout $x \in \mathbb{R}$ est

$$y(x) = \left[\begin{array}{ll} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}, & \text{si} \quad a \neq b, \;\; a, b \in \mathbb{R}, \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}, & \text{si} \quad a = b \in \mathbb{R}, \\ C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, & \text{si} \quad a = \alpha + i\beta = \bar{b} \notin \mathbb{R} \end{array} \right.$$

pour tout couple $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

14. Une EDL2 homogène admet une seule solution $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $y(x_0) = a_0$ et $y'(x_0) = b_0$ pour tout $x_0 \in I$, $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

15. Deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ d'une EDL2 homogène sur $I \subset \mathbb{R}$ sont dites linéairement indépendantes s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $y_2(x) = cy_1(x)$ ou $y_1(x) = cy_2(x)$ pour tout $x \in I$.

16. Si $v_1 : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ telle que $v_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors

$$v_2(x) = v_1(x) \cdot \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}\, dx$$

est une solution linéairement indépendante, où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

17. Si $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $W[v_1, v_2] : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le Wronskien de v_1 et v_2.

18. Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$. Alors les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $W[v_1, v_2] \neq 0$ pour tout $x \in I$.

19. Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'EDL2 homogène. Alors la solution générale de cette équation est de la forme

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in I.$$

20. Méthode de la variation des constantes pour EDL2: Supposons que $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$. Alors la fonction

$$v(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x),$$

où

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)}\,dx \qquad c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)}\,dx$$

(où on supprime les constantes), est une solution de l'équation complète $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x) = f(x)$.

21. Méthode des coefficients indéterminés pour EDL2 à coefficients constants I: Considérons l'équation

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

où $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, $P_n(x)$ un polynôme de dégré n, et a un nombre réel. Alors

   (a) si $a \in \mathbb{R}$ n'est pas une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, on utilise l'Ansatz $y(x) = e^{ax}T_n(x)$, où $T_n(x)$ est un polynôme inconnu de dégré n.

   (b) si $a \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2+p\lambda+q = 0$ de multiplicité r ($r = 1, 2$), on utilise l'Ansatz $y(x) = x^r e^{ax}T_n(x)$, où $T_n(x)$ est un polynôme inconnu de dégré n.

   Ensuite on remplace l'Ansatz dans l'équation différentielle pour obtenir les équations sur les coefficients indéterminés.

22. Méthode des coefficients indéterminés pour EDL2 à coefficients constants II: Considérons l'équation

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

où $f(x) = e^{ax}(\cos(bx)P_n(x) + \sin(bx)Q_m(x))$, $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ des polynômes de degré n et m respectivement, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

   (a) si $a \pm ib \in \mathbb{C}$ n'est pas une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, on utilise l'Ansatz $y(x) = e^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx)$, où $N = \max(n, m)$, $T_N(x)$ et $S_N(x)$ sont des polynômes inconnus de degré N.

   (b) si $a \pm ib \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, on utilise l'Ansatz $y(x) = xe^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx)$, où $N = \max(n, m)$, $T_N(x)$ et $S_N(x)$ sont des polynômes inconnus de degré N.

   Ensuite on remplace l'Ansatz dans l'équation différentielle pour obtenir les équations sur les coefficients indéterminés.

23. Principe de superposition des solutions pour EDL2: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $p, q, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_1 : I \to \mathbb{R}$ et $v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions particulières des équations $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f_1(x)$ et $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f_2(x)$, respectivement. Alors la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)$$

est une solution particulière de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f_1(x) + f_2(x)$.