Proposition pour le Wronskien

Soient $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ (EDL2 homogène).
$v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Preuve $\Longleftarrow$

Démontrons ce point par la contraposée. Nous voulons donc montrer que les solutions sont linéairement dépendantes implique qu'il existe $x \in I$ tel que $W[v_1, v_2](x) = 0$.

Puisque nos deux solutions sont linéairement dépendantes, nous pouvons prendre sans perte de généralité qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v_1(x) = cv_2(x)$ (si plutôt $v_2(x) = cv_1(x)$, nous pourrions juste échanger les noms, d'où le "sans perte de généralité").

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} W[v_1, v_2](x) &= \det\begin{pmatrix} v_1(x) & cv_1(x) \\ v_1'(x) & cv_1'(x) \end{pmatrix} \\ &= cv_1(x)v_1'(x) - cv_1(x)v_1'(x) \\ &= 0, \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé que le Wronskien est nul pour tout x sur cet intervalle, donc il existe bien un x pour lequel il est égal à 0.

Preuve $\implies$

Prouvons aussi cette affirmation par la contraposée. Nous voulons donc montrer que, s'il existe $x_0 \in I$ tel que $W[v_1, v_2](x_0) = 0$, alors $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement dépendantes.

Puisqu'il existe un tel $x_0 \in I$, nous savons que :

$$\det\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi, le kernel de cette matrice est est non-trivial (il n'est pas de dimension 0), donc il existe un vecteur non nul $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} av_1(x_0) + bv_2(x_0) = 0 \\ av_1'(x_0) + bv_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Soit $v(x) = av_1(x) + bv_2(x)$. Alors, $v(x)$ est une solution de l'équation donnée par la superposition des solutions. De plus, par le système d'équations que nous venons de trouver, nous avons $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$. Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, cette équation admet une seule solution satisfaisant $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$. Puisque la solution triviale $y(x) = 0 \; \forall x \in I$ satisfait l'équation et les conditions initiale, alors nécessairement :

$$v(x) = av_1(x) + bv_2(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Puisque a et b ne sont pas les deux nuls, soit nous avons $v_1(x) = \frac{-b}{a} v_2(x)$ pour tout $x \in I$, soit nous avons $v_2(x) = -\frac{a}{b} v_1(x)$ pour tout $x \in I$ (soit les deux).

Nous avons donc bien trouvé que $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement dépendantes sur I.

□

Idée de la preuve

On démontre que $Q \implies P$ et $P \implies Q$ par la contraposée car P et Q sont des propositions "négatives" : il est beaucoup plus simple d'avoir une fonction qui est parfois égale à 0, ou deux fonctions qui sont linéairement dépendantes.

Théorème : Forme des solutions aux EDL2 homogènes

Soient $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.
Alors, la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Preuve

Soit $\widetilde{v}(x)$ une solution quelconque de l'équation donnée, et soit $x_0 \in I$. Soient aussi $a_0 \in \mathbb{R}$ et $b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\widetilde{v}(x_0) = a_0$ et $\widetilde{v}'(x_0) = b_0$.

Par hypothèse, nous avons deux solutions linéairement indépendantes $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$. Ainsi, par la caractérisation, nous savons que $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, ce qui implique que $W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$.

Or, quand le déterminant d'une matrice est non-nul (la matrice est dite *non-dégénérée*), nous savons qu'une équation l'utilisant a une solution unique. Ainsi, nous savons qu'il existe d'uniques constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} C_1 v_1(x_0) + C_2 v_2(x_0) = a_0 \\ C_1 v_1'(x_0) + C_2 v_2'(x_0) = b_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction $v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$. Nous pouvons voir deux informations. La première est que $v(x)$ est une solution de l'équation (puisque $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont des solutions). La deuxième est que $v(x_0) = a_0$ et $v'(x_0) = b_0$.

Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution des EDL2 homogènes satisfaisant des conditions initiales données $v(x_0) = a_0$ et $v'(x_0) = b_0$, on a $\widetilde{v}(x) = v(x)$ pour tout $x \in I$. Nous avons donc bien montré que notre solution de départ est de la bonne forme.

□

Proposition : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la somme $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2$.

Nous savons que $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2 \geq 0$, puisque c'est une somme de termes positifs :

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\lambda^2 x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2\right)$$

Et donc :

$$0 \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}_{a} \lambda^2 + 2\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)}_{b} \lambda + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)}_{c}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Nous avons obtenu une équation quadratique selon λ qui est toujours positive. Ainsi, on remarque qu'il est impossible que cette équation ait deux racines, sinon, par le théorèmes des valeurs intermédiaires, elle serait négative en certains points. Nous savons donc qu'elle a un discriminant négatif :

$$b^2 - 4ac \leq 0 \implies 4\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2}_{=\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} - 4\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}_{=\|\vec{x}\|^2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)}_{=\|\vec{y}\|^2} \leq 0$$