Chapitre 2

Démonstrations à connaître

Théorème : Existence et unicité d'une solution des EDVS

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in I$, et soit $g : J \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
Existence : Alors, pour tout couple (x_0, b_0) où $x_0 \in J$ et $b_0 \in I$, l'équation

$$f(y)y' = g(x)$$

admet une solution $y : J' \subset J \mapsto I$ vérifiant la condition initiale.
Unicité : Si $y_1 : J_1 \mapsto I$ et $y_2 : J_2 \mapsto I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors :

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \forall x \in J_1 \cap J_2$$

Preuve

Nous allons seulement montrer l'existence de la solution.
Soit la fonction suivante :

$$F(y) = \int_{b_0}^{y} f(t)dt$$

On sait que $F(y)$ est dérivable par le théorème fondamental du calcul intégral. De plus, on sait que $F'(y) = f(y) \neq 0$ sur I, donc $f(y)$ ne change pas pas de signe et donc $F(y)$ est monotone. Puisque $F(y)$ est continue et monotone, on sait qu'elle est inversible sur I.
Soit aussi la fonction suivante :

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Par le théorème fondamental du calcul intégral, on sait aussi que $G(x_0) = 0$ et que G est dérivable sur J.
Définissons aussi la fonction suivante dans un voisinage de x_0 (on sait que F est inversible sur I, et $F^{-1}(G(x_0)) = b_0 \in I$) :

$$y(x) = F^{-1}(G(x))$$

Nous allons démontrer que $y(x)$ est une solution de l'équation $f(y)y'(x) = g(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$, et qu'elle satisfait $y(x_0) = b_0$.
En manipulant notre définition, on obtient que, dans un voisinage de $x_0 \in J$:

$$F(y(x)) = G(x) \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} F'(y(x))y'(x) = G'(x) \implies f(y)y'(x) = g(x)$$

De plus, nous savons par la définition de G et F que $G(x_0) = 0$ et $F(b_0) = 0$, donc :

$$y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = b_0$$

□

Idée de la preuve

Nous partons de notre équation :

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Et, notre théorème nous dit que c'est plus ou moins équivalent à :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \iff F(y) = G(x)$$

Proposition pour les EDL1

Soient $p, f : I \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation suivante :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$$

Alors, la solution générale de cette équation est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

Preuve

Nous allons montrer que toute solution de cette équation est de la forme $v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.

Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On a aussi que $v_0(x)$ est une solution de la même équation.

Alors, d'après le principe de superposition de solutions, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Ainsi, $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation homogène :

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0$$

Cependant, c'est une EDVS, donc nous savons que la solution générale de cette équation homogène est :

$$v(x) = Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraire}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

On en déduit qu'il existe une valeur de $C \in \mathbb{R}$ telle que $v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$. Ainsi, on obtient que la solution $v_1(x)$ est de la forme :

$$v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$$

Puisque $v_1(x)$ était une solution arbitraire, nous obtenons que l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R}, x \in I$$

Donc, par définition, $v(x)$ est la solution générale.

□