Théorème : Caractérisation des limites à partir des suites convergentes

Une fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ si et seulement si *pour toute* suite d'éléments $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\}$ de $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in E \text{ tel que } \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\}$, qui converge vers $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$, la suite $\left\{f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right)\right\}$ converge vers ℓ. En d'autres mots :

$$\left(\lim_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = \ell\right) \iff \left(\lim_{k\to\infty} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) = \ell,\ \forall\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\} \subset E \setminus \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\} \text{ telle que } \lim_{k\to\infty} \overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right)$$

Preuve $\implies$

Nous savons par hypothèse que $\lim_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = \ell$. Ainsi, par la définition de la limite, on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$0 < \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta \implies \left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Soit une suite arbitraire $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\} \subset E \setminus \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\}$ telle que $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$. Puisque la définition des limites pour les suites marche pour tout $\widetilde{\varepsilon}$, nous pouvons prendre $\widetilde{\varepsilon} = \delta$. Ainsi, par définition, pour $\widetilde{\varepsilon} = \delta > 0$, nous savons que $\exists k_0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on a :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta$$

Or, puisque $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\} \subset E \setminus \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right\}$, nous savons que $\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} \neq 0$. Ainsi, pour tout $k \geq k_0$, $0 < \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta$. Cependant, cela implique par la première implication que :

$$\left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ on a $\left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$. En d'autres mots, nous avons montré que :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) = \ell$$

Preuve $\impliedby$

Nous allons faire cette preuve par la contraposée. Ainsi, nous supposons par hypothèse que $\lim_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \neq \ell$.

Par la définition de la limite, on obtient que $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists \overrightarrow{\boldsymbol{x_\delta}}$ tel que :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x_\delta}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta \quad \text{et} \quad \left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_\delta}}\right) - \ell\right| > \varepsilon$$

Puisque c'est vrai pour tout δ, alors c'est aussi vrai pour le cas particulier où $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$. Ainsi, pour le ε dont nous connaissons l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, il existe $\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} \in E$ tel que :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right) - \ell\right| > \varepsilon$$

On obtient la suite $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ qui est telle que, par la définition, $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$. Cependant, cette suite est aussi telle que $\left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right) - \ell\right| > \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, ce qui implique que :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right) \neq \ell$$

□