Théorème du min et du max sur un compact

Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^2$ atteint son maximum et son minimum, i.e. :

$$\exists \max_{\vec{x} \in E} f(\vec{x}), \quad \exists \min_{\vec{x} \in E} f(\vec{x})$$

Preuve $f(E)$ est borné

Nous voulons commencer par montrer que $\left\{f\left(\vec{x}\right)\right\}_{\vec{x} \in E}$ est borné.

Supposons par l'absurde que $f(E)$ n'est pas borné, c'est à dire que pour tout $k \geq 0$, il existe un $\vec{x_k} \in E$ tel que $\left|f\left(\vec{x_k}\right)\right| \geq k$. Ceci nous donne une suite $\left\{\vec{x_k}\right\} \in E$.

Puisque E est un ensemble compact, nous savons qu'il est borné, et donc $\left\{\vec{x_k}\right\}$ est bornée. Ainsi, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous pouvons trouver une sous suite convergente $\left\{\vec{x_{k_p}}\right\}$, qui a pour limite un vecteur $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Puisque E est compact (et donc fermé), nous savons que $\vec{x_0} \in E$.

Puisque f est continue, nous savons que :

$$\lim_{p \to \infty} f\left(\vec{x_{k_p}}\right) = f\left(\vec{x_0}\right) \in \mathbb{R}$$

Mais, par construction, $\left|f\left(\vec{x_k}\right)\right| \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est notre contradiction. Nous en concluons que f est bornée sur E.

Preuve f atteint ses extremum

Nous voulons montrer que f atteint son minimum et son maximum sur E.

Par ce que nous venons de démontrer, nous savons que $f(E)$ est un sous-ensemble borné. Ainsi :

$$\exists M = \sup\left\{f\left(\vec{x}\right), \vec{x} \in E\right\}, \quad \exists m = \inf\left\{f\left(\vec{x}\right), \vec{x} \in E\right\}$$

Par la définition du supremum et de l'infimum, nous pouvons nous en rapprocher arbitrairement, donc cela implique qu'il existe deux suites $\left\{\vec{a_k}\right\}, \left\{\vec{b_k}\right\} \in E$ telles que :

$$\lim_{k \to \infty} f\left(\vec{a_k}\right) = m, \quad \lim_{k \to \infty} f\left(\vec{b_k}\right) = M$$

Or, puisque $\left\{\vec{a_k}\right\}, \left\{\vec{b_k}\right\} \in E$ (qui est borné), ce sont des suites bornées, et donc il existe des sous-suites convergentes. En d'autres mots :

$$\vec{a_{k_p}} \to \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{b_{k_p}} \to \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

De plus, puisque E est compact (et donc fermé), nous savons que $\vec{a} \in E$ et $\vec{b} \in E$. Ainsi, par la continuité de f :

$$m = \lim_{k \to \infty} f\left(\vec{a_k}\right) = \lim_{p \to \infty} f\left(\vec{a_{k_p}}\right) = f\left(\vec{a}\right)$$

$$M = \lim_{k \to \infty} f\left(\vec{b_k}\right) = \lim_{p \to \infty} f\left(\vec{b_{k_p}}\right) = f\left(\vec{b}\right)$$

Ainsi, nous savons qu'il existe $\vec{a}, \vec{b} \in E$ tels que :

$$f\left(\vec{a}\right) = m = \min_{\vec{x} \in E} f\left(\vec{x}\right)$$

$$f\left(\vec{b}\right) = M = \max_{\vec{x} \in E} f\left(\vec{x}\right)$$

□

Proposition : Hypothèses équivalentes pour le théorème de la condition suffisante pour un extremum local quand $n = 2$

Dans le cas où $n = 2$, nous pouvons réécrire les conditions de notre théorème.