Théorème : Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte quand $n = 2$

Soit l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ et soient les fonctions $f, g : E \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons que $f(x,y)$ admette un extremum en $(a,b) \in E$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$, et que $\nabla g(a,b) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$.
Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, appelé le **multiplicateur de Lagrange**, tel que :

$$\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$$

Preuve

Nous savons que $\nabla g(a,b) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, donc au moins l'une des dérivées partielles est non-nulle. Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ (le cas $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$ est similaire).

Nous avons $g(a,b) = 0$ puisque (a,b) satisfait la contrainte $g(x,y) = 0$. Ainsi, par le TFI, il existe une fonction $y = h(x)$ de classe C^1 au voisinage de $x = a$ telle que :

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x))}, \quad \text{avec } g(x,h(x)) = 0$$

Aussi, pour (x,y) satisfaisant notre contrainte $g(x,y) = 0$, nous pouvons remplacer $y = h(x)$ dans l'expression $f(x,y)$ pour obtenir une fonction d'une seule variable :

$$f(x,y) \overset{\text{si } g(x,y)=0}{=} f(x,h(x))$$

Nous savons que les extrema de cette fonction, respectent :

$$f'(x, h(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))h'(x) = 0$$

Par hypothèse, (a, b) est un point d'extremum, et il respecte la contrainte $g(a, b) = 0$, donc les hypothèses de l'équation que nous venons d'obtenir sont bien respectées, ce qui nous permet de trouver que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h'(a)$$

Pour résumer, nous avons trouvé jusque là que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h'(a), \quad h'(a) \overset{\text{TFI}}{=} -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}$$

Ceci implique que :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}_{v_1} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{v_2} \frac{\overbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}^{u_1}}{\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}_{u_2 \neq 0}}$$

Séparons notre preuve en différents cas. Si $u_1 = 0$, alors $v_1 = 0$ et donc $\nabla f(a, b) = (0, v_2)$ et $\nabla g(a, b) = (0, u_2)$. Ceci implique bien qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = \lambda \underbrace{u_2}_{\neq 0}$ et donc :

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Sinon (si $u_1 \neq 0$), alors, en définissant $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} := \lambda \in \mathbb{R}$, nous trouvons :

$$(v_1, v_2) = \lambda(u_1, u_2) \iff \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

□

Intuition de la preuve

Nous trouvons $f(x, y)$ sous la forme d'une fonction d'une seule variable et la dérivons, puis nous utilisons le théorème des fonctions implicites, ce qui nous permet de trouver un lien entre les dérivées de f et celles de g.