Analyse II – Corrigé de la Série 9

Exercice 1.

On a la fonction composée $f(x,y) = \bar{f}\big(u(x,y), v(x,y)\big) = \bar{f}(2x-y, x+3y)$. Par le Théorème sur la matrice Jacobienne d'une fonction composée, on a

$$J_f(x,y) = J_{\bar{f}(u(x,y),v(x,y))} \cdot J_{(u(x,y),v(x,y))}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \nabla f(x,y) = \nabla \bar{f}(u,v) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En particulier, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \ ,$$

En utilisant la formule pour la dérivation de fonctions composées et la règle de la dérivée d'un produit, on a successivement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ .$$

La formule de la dérivée partielle par rapport à x alors donne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \ ,$$

et de même pour $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right)$. Alors on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ .$$

Les dérivées analogues par rapport à y, c.-à-d. $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, sont obtenues en remplaçant x par y ci-dessus. En substituant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

dans les expressions pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
&= 5\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} + 10\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

Exercice 2.

i) Le domaine de H est $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Ainsi $u > 0$ et donc $\mathrm{Im}(H) = \tilde{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$, c.-à-d. $\tilde{D} = D$. Pour trouver la transformation inverse G on résout les équations de u et v pour x et y. On a $y = v\sqrt{x}$, d'où

$$u = x^2 + 2v^2 x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-2v^2 \pm \sqrt{4v^4 + 4u}}{2} = -v^2 \pm \sqrt{v^4 + u}\,.$$

Comme $x > 0$, il faut prendre la solution avec $+\sqrt{\ }$ et donc

$$(x,y) = G(u,v) = \left(-v^2 + \sqrt{v^4+u}\,,\, v\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4+u}}\right).$$

Le dérivées partielles de G sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial u} &= \frac{1}{2\sqrt{v^4+u}} \\
\frac{\partial G_1}{\partial v} &= -2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4+u}} = \frac{-2v\left(-v^2 + \sqrt{v^4+u}\right)}{\sqrt{v^4+u}} \\
\frac{\partial G_2}{\partial u} &= \frac{v}{4\sqrt{v^4+u}\sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}}} \\
\frac{\partial G_2}{\partial v} &= \sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}} + \frac{v}{2\sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}}}\left(-2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4+u}}\right) \\
&= \sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}} + \frac{-v^2\left(-v^2+\sqrt{v^4+u}\right)}{\sqrt{v^4+u}\sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}}} \\
&= \frac{\left(-v^2+\sqrt{v^4+u}\right)^2}{\sqrt{v^4+u}\sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}}}
\end{aligned}$$

La matrice jacobienne de G est alors

$$\begin{aligned}
J_G(u,v) &= \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u,v) & \partial_v G_1(u,v) \\ \partial_u G_2(u,v) & \partial_v G_2(u,v) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{v^4+u}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2v\left(-v^2+\sqrt{v^4+u}\right) \\ \frac{v}{4\sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}}} & \frac{\left(-v^2+\sqrt{v^4+u}\right)^2}{\sqrt{-v^2+\sqrt{v^4+u}}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour évaluer en $(u,v) = H(x,y)$, observons que

$$\sqrt{v^4+u} = \sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^4 + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{x^2} + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{(y^2+x^2)^2}{x^2}} = \frac{y^2+x^2}{x}$$

et donc

$$J_G\big(H(x,y)\big) = \frac{x}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2y\sqrt{x} \\ \frac{y}{4\sqrt{x}\sqrt{x}} & x^{3/2} \end{pmatrix} = \frac{x}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2y\sqrt{x} \\ \frac{y}{4x} & x^{3/2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ii) La matrice jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ -\frac{y}{2x^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\big(J_H(x,y)\big)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x} + \frac{2y^2}{x^{3/2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} & -4y \\ \frac{y}{2x^{3/2}} & 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} x & -4yx^{3/2} \\ \frac{y}{2} & 2x^{5/2} \end{pmatrix},$$

ce qui est la même matrice qu'en (1).

On a donc montré pour cet exemple que $J_G\big(H(x,y)\big) = \big(J_H(x,y)\big)^{-1}$. Cette égalité est vraie en général parce qu'en prenant $G = F^{-1}$ on obtient $F \circ G = \mathrm{id}$ et d'après le théorème du cours sur les matrices Jacobiennes d'une fonction composée, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_{\mathrm{id}}(x,y) = J_F\big(F^{-1}(x,y)\big) \cdot J_{F^{-1}}(x,y),$$

d'où $J_{F^{-1}}(x,y) = \Big(J_F\big(F^{-1}(x,y)\big)\Big)^{-1}$ pour autant que F et F^{-1} existent et soient C^1.

Exercice 3.

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction changement de coordonnées

$$g(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

Alors la matrice Jacobienne de g est

$$J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

et son déterminant est $\det(J_g) = r > 0$. Dans une première étape on va trouver le gradient de f, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ en termes de coordonnées polaires. Par le Théorème de la dérivée d'une fonction composée, on a

$$\left(\frac{\partial(f\circ g)}{\partial r}, \frac{\partial(f\circ g)}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot J_g(r,\varphi).$$

Alors on obtient pour le gradient

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial(f\circ g)}{\partial r}, \frac{\partial(f\circ g)}{\partial \varphi}\right) \cdot [J_g(r,\varphi)]^{-1}.$$

La matrice inverse s'écrit facilement pour la matrice 2×2. En général pour une matrice inversible A on trouve

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Donc l'inverse de la matrice Jacobienne s'écrit

$$J_g^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r}\sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

On obtient pour le gradient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial(f\circ g)}{\partial r}, \frac{\partial(f\circ g)}{\partial \varphi}\right)\cdot\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r}\sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi)\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\cos(\varphi)\frac{\partial(f\circ g)}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial(f\circ g)}{\partial \varphi},\quad \sin(\varphi)\frac{\partial(f\circ g)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\frac{\partial(f\circ g)}{\partial \varphi}\right).$$

(Voir les notes du cours).
Maintenant il nous reste à calculer les dérivées secondes. Pour trouver $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\partial_x f)$, il suffit de remplacer f par $\frac{\partial f}{\partial x}$ dans l'expression qu'on a déjà trouvé pour la première dérivée par rapport à x. On va écrire $\partial_x f$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial^2_{r,\varphi}(f\circ g)$ pour $\frac{\partial^2(f\circ g)}{\partial r\partial\varphi}$ etc.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}(\partial_x f) - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}(\partial_x f) =$$

$$= \cos^2(\varphi)\partial^2_{r^2}(f\circ g) + \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2}\partial_\varphi(f\circ g) - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r}\partial^2_{r,\varphi}(f\circ g) +$$
$$+ \frac{\sin^2(\varphi)}{r}\partial_r(f\circ g) + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}\partial^2_{\phi^2}(f\circ g).$$

D'une façon similaire on calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}(\partial_y f) + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}(\partial_y f) =$$

$$= \sin^2(\varphi)\partial^2_{r^2}(f\circ g) - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2}\partial_\varphi(f\circ g) + \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r}\partial^2_{r,\varphi}(f\circ g) +$$
$$+ \frac{\cos^2(\varphi)}{r}\partial_r(f\circ g) + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}\partial^2_{\varphi^2}(f\circ g).$$

Finalement on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial^2_{r^2}(f\circ g) + \frac{1}{r}\partial_r(f\circ g) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi^2}(f\circ g),$$

la formule énoncée au cours.

Exercice 4.

i) On a la fonction $G\colon \mathbb{R}^*_+ \times [0,\pi]\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ avec

$$G(\rho,\theta,\varphi) = \big(G_1(\rho,\theta,\varphi), G_2(\rho,\theta,\varphi), G_3(\rho,\theta,\varphi)\big),$$

où

$$\begin{aligned} x &= G_1(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi), \\ y &= G_2(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \\ z &= G_3(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\theta). \end{aligned}$$

On vérifie par un calcul direct que $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Ainsi le point (x,y,z) est bien sur la sphère de rayon ρ.

ii) La matrice jacobienne de G est

$$J_G(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial G_3}{\partial \rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est

$$\det\big(J_G(\rho,\theta,\varphi)\big) = \rho^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) + \rho^2\sin^3(\theta)\sin^2(\varphi) +$$

$$+\rho^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi) + \rho^2\sin^3(\theta)\cos^2(\varphi) = \rho^2\sin(\theta).$$

On peut conclure que la fonction $G(\rho,\theta,\varphi)$ est bijective lorsque $\rho^2\sin(\theta) \neq 0$ ce qui correspond à l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$.

iii) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de (x,y,z) telle que $f \circ G(\rho,\theta,\varphi) = f \circ G(\rho)$. Puisque f et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on a l'égalité

$$\left(\frac{\partial(f\circ G)}{\partial \rho}, \frac{\partial(f\circ G)}{\partial \theta}, \frac{\partial(f\circ G)}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot J_G(\rho,\theta,\varphi).$$

Alors on a sur l'ensemble $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ où la matrice J_G est invertible que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial(f\circ G)}{\partial \rho}, \frac{\partial(f\circ G)}{\partial \theta}, \frac{\partial(f\circ G)}{\partial \varphi}\right) \cdot [J_G(\rho,\theta,\varphi)]^{-1}.$$

Car $(f \circ G)$ ne dépend que de ρ, on a $\frac{\partial(f\circ G)}{\partial \theta} = \frac{\partial(f\circ G)}{\partial \varphi} = 0$ et donc pour calculer ∇f il nous suffit de calculer la première ligne de la matrice inverse J_G^{-1}. L'inverse de la matrice donnée s'écrit à l'aide de la matrice complémentaire C

$$J_G^{-1} = \frac{1}{\det(J_G)} C.$$

Les éléments de la matrice C sont donnés par la formule $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^c_{j,i})$, où pour obtenir la matrice $A^c_{j,i}$ on élimine la j-ème ligne et la i-ème colonne de la matrice originale J_G. (Voir le cours d'algèbre linéaire). Alors on a

$$J_G^{-1} = \frac{1}{\rho^2\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \det(A^c_{1,1}) & -\det(A^c_{2,1}) & \det(A^c_{3,1}) \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

où

$$A^c_{1,1} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad A^c_{2,1} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^c_{3,1} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$J_G^{-1} = \frac{1}{\rho^2\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \rho^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi) & \rho^2\sin^2(\theta)\sin(\varphi) & \rho^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Finalement on obtient pour le gradient

$$\nabla f = \left(\frac{\partial(f\circ G)}{\partial\rho}, 0, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sin(\theta)\cos(\varphi)\frac{\partial(f\circ G)}{\partial\rho}, \sin(\theta)\sin(\varphi)\frac{\partial(f\circ G)}{\partial\rho}, \cos(\theta)\frac{\partial(f\circ G)}{\partial\rho}\right).$$

Exercice 5.

i) D'après la matrice Jacobienne donnée on conclu que $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -2y$. La première égalité implique $g_1(x,y) = x^2 + h(y)$, où $h(y)$ est une fonction inconnue de y. Puis, la deuxième relation donne $\frac{\partial g_1}{\partial y} = h'(y) = -2y$ ce qui nous permet de conclure que $g_1(x,y) = x^2 + h(y) = x^2 - y^2 + C_1$. D'une façon similaire les égalités $\frac{\partial g_2}{\partial x} = 2y$ et $\frac{\partial g_2}{\partial y} = 2x$ impliquent $g_2(x,y) = 2xy + C_2$. Puisque $g(1,1) = (1,1)$, on obtient pour les constantes $C_1 = 1$ et $C_2 = -1$. Finalement, $g(x,y) = (x^2 - y^2 + 1, 2xy - 1)$ et $g(-1,2) = (-2,-5)$.

La fonction de classe C^1 est bijective dans un voisinage d'un point si et seulement si le déterminant de la matrice Jacobienne est non nul en se point. On trouve $\det J_g(x,y) = 4x^2 + 4y^2 \geq 0$, avec l'égalité en un seul point $(x,y) = (0,0)$. Alors g est localement bijective sur $R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ii) D'une manière similaire au cas précédent, on trouve d'après la matrice Jacobienne :

$$g_1(x,y) = xy^2 + h_1(y) = xy^2 + C_1$$

$$g_2(x,y) = 2x^2 + h_2(y) = 2x^2 - y + C_2$$

Puisque $g(1,1) = (1,1)$, on obtient pour les constantes: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, et donc $g(x,y) = (xy^2, 2x^2 - y)$. Finalement, $g(-1,2) = (-4,0)$.

On trouve dans ce cas $\det J_g(x,y) = -y^2 - 8x^2y = -y(y + 8x^2)$. Le déterminant est nul si $y = 0$ ou bien $y = -8x^2$. Alors la fonction g est localement bijective sur chacun des ensembles

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -8x^2 < y < 0, x > 0\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -8x^2 < y < 0, x < 0\}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -8x^2\}.$$

Exercice 6.

Les fonctions F données sont des intégrales dépendant d'un paramètre de la forme

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\, dx\,.$$

Si les fonctions f, a et b sont de classe C^1, la dérivée de F est (cf. cours)

$$\frac{d}{dt}F(t) = f\big(b(t),t\big)\cdot b'(t) - f\big(a(t),t\big)\cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx\ . \tag{2}$$

i) On a $f(x,t) = \frac{x^t+\sin(x)}{\ln(x)} \in C^1\big(]2,3[\times]1,\infty[\big)$, $a(t) = 2$ et $b(t) = 3$ avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$. Puisque les bornes sont constantes, le membre de droite de (**??**) consiste uniquement de l'intégrale et on a

$$F'(t) = \int_2^3 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^t+\sin(x)}{\ln(x)}\right) dx = \int_2^3 \frac{x^t\ln(x)}{\ln(x)}\, dx = \int_2^3 x^t\, dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_2^3 = \frac{3^{t+1}-2^{t+1}}{t+1}\ .$$

ii) On a $f(x,t) = \ln(x^2+t^2) \in C^1\big(]1,\infty[\times]1,\infty[\big)$, $a(t) = t$ et $b(t) = t^2$ avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$. Les bornes dépendent de t. On a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \ln\Big(\big(t^2\big)^2 + t^2\Big)\,\frac{d}{dt}(t^2) - \ln\big(t^2+t^2\big)\,\frac{d}{dt}(t) + \int_t^{t^2} \frac{\partial}{\partial t}\big(\ln(x^2+t^2)\big)\, dx \\ &= 2t\ln\big(t^2\,(t^2+1)\big) - \ln\big(2t^2\big) + \int_t^{t^2} \frac{2t}{x^2+t^2}\, dx\,. \end{aligned}$$

Puisque $2t\displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{x^2+t^2}\, dx = \left[\frac{2t}{t}\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_t^{t^2} = 2\arctan(t) - \frac{\pi}{2}$, on a finalement

$$F'(t) = 2t\ln\big(t^2(t^2+1)\big) - \ln\big(2t^2\big) + 2\arctan(t) - \frac{\pi}{2}\ .$$

iii) Pour $f(x,t) = \frac{e^{tx^3}}{x} \in C^1(]1,\infty[\times]1,\infty[)$, $a(t) = 1$ et $b(t) = \sqrt[3]{t}$ avec $a, b \in C^1(]1,\infty[)$, seulement la borne supérieure dépend de t si bien que le terme en $f(a(t),t)$ n'apparaît pas.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left.\frac{e^{tx^3}}{x}\right|_{x=\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sqrt[3]{t}\right) + \int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx^3}}{x}\right) dx \\ &= \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{t}}\cdot\frac{1}{3}\,t^{-2/3} + \int_1^{\sqrt[3]{t}} x^2 e^{tx^3}\, dx = \frac{1}{3}\frac{e^{t^2}}{t} + \left[\frac{1}{3t}\,e^{tx^3}\right]_1^{\sqrt[3]{t}} \\ &= \frac{1}{3t}\left(e^{t^2} - e^t\right) + \frac{1}{3}\frac{e^{t^2}}{t} = \frac{1}{3t}\left(2e^{t^2} - e^t\right). \end{aligned}$$