Anna Lachowska

Analyse II – Corrigé de la Série 4

Exercice 1.
Pour trouver des solutions de l'équation homogène on utilise l'équation caractéristique: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, où p et q sont des coefficients dans léquation différentielle $y'' + py' + qy = 0$. Pour trouver une solution particulère on utilise l'Ansatz convenable pour chaque équation (voir le cours du 6 mars). Si la partie droite de l'équation contient plusieurs fonctions exponentielles et trigonométriques, on utilise le principe de la superposition des solutions.

i) (1) L'équation caractèristique est $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Pour les deux solutions linéairement indépendentes on peut prendre $v_1(x) = e^{2x}$ et $v_2(x) = e^{3x}$.
(2) Le nombre $a = \pm i$ n'est pas une racine de l'équation caractèristique. Le polynôme dans l'expression pour $f(x) = (3x^2 + 1)\cos(x)$ est de degré 2. Donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = (Ax^2 + Bx + C)\cos(x) + (Dx^2 + Ex + F)\sin(x).$$

ii) (1) L'équation caractèristique est $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Pour les deux solutions linéairement indépendentes on peut prendre $v_1(x) = e^{2x}$ et $v_2(x) = e^{3x}$.
(2) Le nombre $a = 3$ est une racine de l'équation caractèristique de multiplicité 1. Le polynôme dans l'expression pour $f(x) = e^{3x}$ est de degré 0. Donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = Axe^{3x}.$$

iii) (1) L'équation caractèristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Pour les deux solutions linéairement indépendentes on peut prendre $v_1(x) = e^{x}$ et $v_2(x) = e^{2x}$.
(2) Les nombres $a = 3$ et $a = 0$ ne sont pas des racines de l'équation caractèristique. Les polynômes dans l'expression pour $f(x) = xe^{3x} + 2x^2e^{0x}$ sont de degré 1 et 2 respectivement. Donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = (Ax + B)e^{3x} + (Cx^2 + Dx + E).$$

iv) (1) L'équation caractèristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Pour les deux solutions linéairement indépendentes on peut prendre $v_1(x) = e^{x}$ et $v_2(x) = e^{2x}$.
(2) Le nombre $a = 2$ est une racine de l'équation caractèristique de multiplicité 1, mais les nombres $a = 2 \pm i$ ne sont pas des racines. Les polynômes dans l'expression $f(x) = e^{2x}\sin(x) + e^{2x}$ sont de degré 0. Donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = Ae^{2x}\sin(x) + Be^{2x}\cos(x) + Cxe^{2x}.$$

v) (1) L'équation caractèristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Pour les deux solutions linéairement indépendentes on peut prendre $v_1(x) = e^{2x}$ et $v_2(x) = xe^{2x}$.
(2) Les nombres $a = 1 \pm i$ ne sont pas des racine de l'équation caractèristique. Les polynômes dans l'expression $f(x) = e^{x}\cos(x) - e^{x}\sin(x)$ sont de degré 0. Donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = Ae^{x}\sin(x) + Be^{x}\cos(x).$$

vi) (1) L'équation caractèristique est $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Pour les deux solutions linéairement indépendentes on peut prendre $v_1(x) = e^{-2x}$ et $v_2(x) = xe^{-2x}$.
(2) Le nombre $a = -2$ est une racine de l'équation caractèristique de multiplicité 2, mais le nombre $a = 2$ n'est pas une racine. Les polynômes dans l'expression pour $f(x) = 3xe^{-2x} - e^{2x}$ sont de degré 1 et 0 respectivement. Donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = x^2(Ax + B)e^{-2x} + Ce^{2x}.$$

Maintenant on revient à l'équation (iv):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(\sin(x) + 1)$$

pour trouver d'abord la solution générale, et puis la solution particulière $y_p(x)$ satisfaisant les conditions initiales $y_p(0) = -\frac{1}{2}$ et $y_p'(0) = \frac{1}{2}$. Considérons l'ansatz trouvé $v_0(x) = Ae^{2x}\sin(x) + Be^{2x}\cos(x) + Cxe^{2x}$. On calcule

$$v_0'(x) = (2A - B)e^{2x}\sin(x) + (A + 2B)e^{2x}\cos(x) + Ce^{2x} + 2Cxe^{2x},$$

$$v_0''(x) = (3A - 4B)e^{2x}\sin(x) + (4A + 3B)e^{2x}\cos(x) + 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}.$$

En remplaçant les expressions pour $v_0'(x)$, $v_0''(x)$ dans l'équation on obtient

$$(3A - 4B)e^{2x}\sin(x) + (4A + 3B)e^{2x}\cos(x) + 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} -$$

$$-3[(2A-B)e^{2x}\sin(x)+(A+2B)e^{2x}\cos(x)+Ce^{2x}+2Cxe^{2x}]+2[Ae^{2x}\sin(x)+Be^{2x}\cos(x)+Cxe^{2x}] =$$

$$(-A - B)e^{2x}\sin(x) + (A - B)e^{2x}\cos(x) + Ce^{2x} = e^{2x}\sin(x) + e^{2x},$$

d'où on trouve $A = B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$.
La solution générale de cette équation s'écrit

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + v_0(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(x) + xe^{2x}.$$

Pour appliquer les conditions initiales on calcule la dérivée:

$$y'(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(x) - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(x) - \frac{3}{2}e^{2x}\sin(x) + e^{2x} + 2xe^{2x}.$$

Alors on a

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}; \qquad y'(0) = C_1 + 2C_2 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2},$$

et donc $C_1 = -C_2 = -1$. La solution particulière recherchée est

$$y_p(x) = -e^x + e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(x) + xe^{2x}.$$

Finalement on a $y_p(\pi/2) = -e^{\pi/2} + (1/2 + \pi/2)e^{\pi}$.

Exercice 2.

i) On trouve d'abord la solutions générale de l'équation homogène à coefficients constants $y'' + y = 0$. L'équation caractèristique est $\lambda^2 + 1 = 0$, donc $\lambda_{1,2} = \pm i$ et on obtient

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \qquad C_1, C_2, \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le Wronskien des deux solutions $v_1(x) = \cos(x)$ et $v_2(x) = \sin(x)$ est

$$W[\cos(x), \sin(x)] = \det \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = 1.$$

Alors par la méthode de la variation des constantes on cherche une solution particulière de la forme $y_{\text{part}}(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x)$, où $C_1(x)$ et $C_2(x)$ sont données par les formules

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)}\, dx = -\int \tan(x)\sin(x)\, dx,$$
$$C_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)}\, dx = \int \tan(x)\cos(x)\, dx,$$

Donc on obtient facilement qui $C_2(x) = \displaystyle\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$ (rappelez-vous qu'on n'a pas besoin des constantes d'intégration pour une solution particulière).

Pour trouver $C_1(x)$ observons que

$$\frac{-\sin(x)^2}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)^2 - 1}{\cos(x)} = \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}$$

et donc

$$C_1(x) = \sin(x) - \int \frac{1}{\cos(x)}\, dx\,.$$

Pour trouver cette dernière primitive, on pose le changement de variable $t = \sin(x)$ et on calcule

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx &= \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{d(\sin(x))}{1 - \sin^2(x)} \\
&= \int \frac{1}{1 - t^2}\, dt = \int \frac{1}{(1+t)(1-t)}\, dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{1}{2}\Big(\ln\left(|1+t|\right) - \ln\left(|1-t|\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\left(1+\sin(x)\right)^2}{1-\sin(x)^2}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|^2\right) = \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $C_1(x) = \sin(x) - \ln\left(\left|\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)$ et donc

$$\begin{aligned}
y_{\text{part}}(x) &= C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x) \\
&= \left[\sin(x) - \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)\right]\cos(x) - \cos(x)\sin(x) \\
&= -\cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)
\end{aligned}$$

ii) Les points problématiques sont ceux où $\cos(x) = 0$ ou $1+\sin(x) = 0$. La fonction f est donc bien définie sur tous les autres points, c.-à-d. sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}\}$.

Pour $x_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, on a $\cos(x_{2n}) = 0$ et $1+\sin(x_{2n}) = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{2n}} f(x) &= \lim_{x\to x_{2n}} \left(-\cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)\right) \\
&= \lim_{x\to x_{2n}} \Big(-\cos(x)\ln\big(|1+\sin(x)|\big)\Big) + \lim_{x\to x_n} \Big(\cos(x)\ln\big(|\cos(x)|\big)\Big) \\
&= \lim_{x\to x_{2n}} \big(-\cos(x)\big) \cdot \lim_{x\to x_{2n}} \ln\big(|1+\sin(x)|\big) + \lim_{y\to 0} \big(y\ln\big(|y|\big)\big) \\
&= 0 \cdot \ln(2) + 0 = 0\,,
\end{aligned}$$

où la dernière limite en y est calculée par Bernoulli-l'Hospital. En effet, les hypothèses sont satisfaites si on écrit $y\ln(|y|) = \dfrac{\ln(|y|)}{1/y}$ (le vérifier). A priori, on devrait séparer les cas $y > 0$ et $y < 0$ mais comme $\dfrac{d}{dy}\ln(|y|) = \dfrac{1}{y}$ pour $y > 0$ *et* pour $y < 0$, il suffit de calculer une seule limite :

$$\lim_{y\to 0}\big(y\ln\big(|y|\big)\big) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(|y|)}{\frac{1}{y}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0}(-y) = 0\,. \tag{1}$$

Si on définit f en ces points par $f(x_{2n}) = 0$, elle est continue en ces points (on a en effet fait un prolongement par continuité).

Pour $x_{2n+1} = \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, on a $\cos(x_{2n+1}) = 0$ et $1+\sin(x_{2n+1}) = 0$. On fait un changement de variable $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi + z$, alors $x \to x_{2n+1}$ correspond à $z \to 0$. Alors on a $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + z) = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)\cos(z) + \cos(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)\sin(z) = -\cos(z)$ et $\cos(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + z) = \cos(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)\cos(z) - \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)\sin(z) = \sin(z)$. On calcule

$$\lim_{x\to x_{2n+1}} \cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) = \lim_{z\to 0}\sin(z)\ln\left(\left|\frac{1-\cos(z)}{\sin(z)}\right|\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}(\sin(z)\ln|1-\cos(z)| - \sin(z)\ln|\sin(z)|).$$

On utilise les formules $1-\cos(z) = 2\sin^2(z/2)$ et $\sin(z) = 2\sin(z/2)\cos(z/2)$, alors on obtient

$$\lim_{z\to 0}(\sin(z)\ln|1-\cos(z)| - \sin(z)\ln|\sin(z)|) =$$

$$= \lim_{z\to 0}(\sin(z)\ln(2\sin^2(z/2)) - \sin(z)\ln|\sin(z)|) =$$

$$= \lim_{z\to 0} \left(\sin(z)\ln 2 + 4\cos(z/2)\sin(z/2)\ln|\sin(z/2)| - \sin(z)\ln|\sin(z)|\right) = 0,$$

puisque la limite de chaque composante de la somme est zéro, où on utilise la limite $\lim_{y\to 0} y\ln|y| = 0$, voir (1) ci-dessus.

Si on définit f en ces points par $f(x_{2n+1}) = 0$ (prolongement par continuité), elle est aussi continue en ces points et donc sur tout $\mathbb{R}$.

Les points qui pourraient poser problème pour la dérivabilité sont les points où f n'était pas continue à la base, c'est-à-dire $\left\{x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Etudions d'abord la dérivabilité de f en les points de la forme x_{2n}. Pour ces points on a

$$-\cos(x) = \sin\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \tfrac{\pi}{2} - 2n\pi\right) = \sin(x - x_{2n}),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{2n}} \frac{f(x) - f(x_{2n})}{x - x_{2n}} &= \lim_{x\to x_{2n}} \frac{-\cos(x)}{x - x_{2n}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= \lim_{x\to x_{2n}} \frac{\sin(x - x_{2n})}{x - x_{2n}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= \lim_{x\to x_{2n}} \frac{\sin(x - x_{2n})}{x - x_{2n}} \cdot \lim_{x\to x_{2n}} \Big(\ln\big(|1+\sin(x)|\big) - \ln\big(|\cos(x)|\big)\Big) \\
&= 1 \cdot (\ln(2) + \infty) = \infty
\end{aligned}$$

parce que $\lim_{x\to x_{2n}} -\ln\big(|\cos(x)|\big) = \infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en x_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour les points de la forme x_{2n+1} on a

$$-\cos(x) = -\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \left(-\tfrac{\pi}{2} - 2n\pi\right)\right) = -\sin(x - x_{2n+1}),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{2n+1}} \frac{f(x) - f(x_{2n+1})}{x - x_{2n+1}} &= \lim_{x\to x_{2n+1}} \frac{-\cos(x)}{x - x_{2n+1}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= \lim_{x\to x_{2n+1}} -\frac{\sin(x - x_{2n+1})}{x - x_{2n+1}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= (-1)\cdot(-\infty) = \infty
\end{aligned}$$

parce qu'il suit par la règle de Bernoulli-l'Hospital

$$\lim_{x\to x_{2n+1}} \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to x_{2n+1}} \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\lim_{x\to x_{2n+1}} \cos(x)}{\lim_{x\to x_{2n+1}} (-\sin(x))} = \frac{0}{1} = 0\,. \tag{2}$$

que $\lim_{x\to x_{2n+1}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) = -\infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en x_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Ceci est une conséquence du fait que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \tan(x)$. En effet, si f était (deux fois) dérivable en ces points, on aurait une contradiction parce que le membre de droite $\tan(x)$ n'est pas défini en ces points.

La fonction f est de classe C^2 dans les intervalles $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

iii) On considère la solution générale de la forme

$$y(x) = y_{\text{part}}(x) + C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) = -\cos(x) \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) + C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles. On se souvient que $C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x) = 0$ par la méthode de la variation des constantes, et donc on a

$$y'_{\text{part}}(x) = C_1(x)v_1'(x) + C_2(x)v_2'(x) = -(\sin(x) - \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)) \sin(x) - \cos^2(x).$$

La solution maximale est définie sur l'intervalle maximale où la fonction est de classe C^2 et qui contient le point $x = 0$, puisque elle doit satisfaire les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Donc l'intervalle de définition est $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour déterminer les constantes C_1 et C_2 on calcule

$$y(0) = C_2 = 0, \qquad y'(0) = -1 + C_1 = 1.$$

Alors $C_1 = 2, C_2 = 0$, and on a la solution maximale

$$y(x) = -\cos(x) \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) + 2\sin(x), \qquad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Exercice 3.

<u>Première méthode</u> : introduisons la nouvelle variable indépendante t par $t = \ln(x)$ et posons $z(t) = y(x(t)) = y(e^t)$. Alors

$$z'(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} y(e^t) = e^t \, y'(e^t)$$
$$z''(t) = e^t \, y'(e^t) + e^{2t} \, y''(e^t)$$

De plus

$$\begin{aligned} x^2 y'' + 3xy' + y &= \left(e^{2t} \, y''(e^t) + e^t \, y'(e^t)\right) + 2e^t \, y'(e^t) + y(e^t) \\ &= z''(t) + 2z'(t) + z(t) \end{aligned}$$

et donc

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 2 + x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad z'' + 2z' + z = 2 + e^{2t} \ .$$

On résout alors l'équation différentielle en z qui est à coefficients constants. Son équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ qui admet une racine double $\lambda = -1$. Donc

$$z_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} \ .$$

On cherche une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés. Comme $a = 0$ et $a = 2$ ne sont pas des solutions de l'équation caractèristique, on utilise l'Ansatz $z_{\text{part}} = Ae^{2t} + B$. Comme

$$z''_{\text{part}} + 2z'_{\text{part}} + z_{\text{part}} = e^{2t} + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (4A + 2 \cdot 2A + A)e^{2t} + B = e^{2t} + 2\,,$$

on a $A = \frac{1}{9}$ et $B = 2$. Ainsi $z_{\text{part}}(t) = \frac{1}{9}e^{2t} + 2$, et la solution générale est

$$z(t) = z_{\text{hom}}(t) + z_{\text{part}}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \tfrac{1}{9} e^{2t} + 2\,, \qquad t, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \ .$$

En revenant à la variable x par la substitution $t = \ln(x)$, on trouve la solution de l'équation initiale qui est

$$y(x) = \Big(C_1 + C_2 \ln(x)\Big)\frac{1}{x} + \frac{1}{9}x^2 + 2\,, \qquad x \in]0, \infty[\text{ et } C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

<u>Deuxième méthode</u> : Puisque $v_1(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0$ est une solution de l'équation homogène

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0, \qquad x > 0,$$

on trouve la second solution linéairement indépendente par la formule (voir le cours du 27 février):

$$v_2(x) = v_1(x)\int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}\,dx,$$

où $P(x)$ est une primitive de la fonction $p(x) = \dfrac{3}{x}$. Donc on a $P(x) = 3\ln(x),\ x > 0$ et

$$v_2(x) = \frac{1}{x}\int \frac{e^{-3\ln(x)}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}\,dx = \frac{1}{x}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x}\ln(x), \qquad x > 0.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x}\ln(x), \quad x > 0,\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nous utilisons la méthode de la variation des constantes pour obtenir une solution particulière. On a (voir le cours du 4 mars)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x}\ln(x) \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2+x^2}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Pour le Wronskien on a

$$w(x) = -\frac{1}{x^3}\ln(x) + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\ln(x) = \frac{1}{x^3}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = x^3\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x}\ln(x) \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2+x^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\ln(x)(2+x^2) \\ C_2'(x) &= 2 + x^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= -\int \ln(x)(2+x^2)\,dx \\
&= -\ln(x)\left(2x+\frac{1}{3}x^3\right) + \int 2+\frac{1}{3}x^2\,dx \\
&= -\ln(x)\left(2x+\frac{1}{3}x^3\right) + \left(2x+\frac{1}{9}x^3\right) \\
C_2(x) &= 2x+\frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

et on obtient pour la solution particulière

$$\begin{aligned}
y_{\text{part}}(x) &= C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x) \\
&= -\ln(x)\left(2+\frac{1}{3}x^2\right) + \left(2+\frac{1}{9}x^2\right) + \ln(x)\left(2+\frac{1}{3}x^2\right) \\
&= 2+\frac{1}{9}x^2.
\end{aligned}$$

La solution générale de l'équation est donc

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_{\text{part}}(x) + y_{\text{hom}}(x) \\
&= 2+\frac{1}{9}x^2 + C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x}\ln(x)\ , \quad x>0,\ C_1,\ C_2\ \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

i) *a)*. Pour tout $y = (y_1, -y_1+\delta, y_3, \dots y_n) \in E$, $\delta > 0$, la boule $B(y, \delta/2) \subset E$.

ii) *b)*. Le complémentaire $CE = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| > \pi\}$ est un sous-ensemble ouvert: si $y \in CE$, alors $B(y, \frac{1}{2}(||y|| - \pi)) \subset CE$.

iii) *a)*. Pour tout $y = (\varepsilon_1, \pm\varepsilon_2, \dots y_n) \in E$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, la boule $B(y, \frac{1}{2}\text{min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \subset E$.

iv) *c)*. Soit $y = (y_1, 0, y_2, \dots, y_n) \in E$. Pour tout $\delta > 0$, la boule $B(y, \delta) \ni (y_1, \delta/2, y_2, \dots, y_n$ et donc $B(y, \delta) \not\subset E$. Le sous-ensemble CE n'est pas ouvert non plus: soit $z = (0, 0, z_3, \dots z_n) \in CE$ et donc pour tout $\delta > 0$ la boule $B(z, \delta) \ni (\delta/2, 0, z_3, \dots z_n)$ n'est pas contenue dans CE.

v) *c)*. Soit $y = (0, y_2 \neq y_3, y_3, \dots y_n) \in E$. Pour tout $\delta > 0$, la boule $B(y, \delta) \ni (\delta/2, y_2 \neq y_3, y_3, \dots y_n)$ et donc $B(y, \delta) \not\subset E$. Le sous-ensemble CE n'est pas ouvert non plus. On a $z = (0, z_2, z_3 = z_2, \dots z_n) \in CE)$. Pour tout $\delta > 0$, la boule $B(z, \delta) \ni (0, z_2 + \delta/2, z_3 = z_2, \dots, z_n)$ et donc $B(z, \delta) \not\subset CE$.

vi) *b)*. Le complémentaire $CE = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \neq 2 \text{ ou } x_2 \neq -2\}$ est un sous-ensemble ouvert. Soit $y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in CE$. Alors $B(y, \frac{1}{2}\sqrt{(y_1-2)^2 + (y_2+2)^2}) \subset CE$.

vii) *c)*. Dans toute boule de centre à coordonnées rationnelles il existent toujours des point à coordonnées irrationnelles, et inversement. C'est un conséquence du théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

viii) *a)*. Pour tout $y = (\varepsilon, y_2, \dots y_n) \in E$, $\varepsilon > 0$, $||y|| < 1$, la boule $B(y, \frac{1}{2}\text{min}(\varepsilon, 1 - ||y||)) \subset E$.