Anna Lachowska
29 mai 2025

Analyse II – Corrigé de la Série 14

Exercice 1.

On utilise les coordonnées cylindriques (r, φ, z) définies par $G : \bar{D} \to D$ telle que

$$(x, y, z) = G(r, \varphi, z) = \big(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi),\ z \big).$$

Le Jacobien est donc

$$J_G(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\,.$$

Pour la sphère on a $r^2 + z^2 = R^2$. Donc on obtient les limites d'intégration: $(r, \varphi, z) \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}] \times [0, 2\pi[\times [-R, R]$.
Alors on la calcule :

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr\,dz = 2\pi \int_{-R}^{R} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz = 2\pi \int_{-R}^{R} \frac{R^2 - z^2}{2}\,dz$$
$$= 2\pi \left[\frac{R^2 z}{2} - \frac{z^3}{6} \right]_{z=-R}^{z=R} = 2\pi \left(\frac{R^3}{3} - \left(-\frac{R^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi R^3}{3}\ .$$

Exercice 2.

i) Le domaine D est représenté à la Fig. **??**. Pour le changement de variable, on définit l'application $H\colon D \to \bar{D}$ telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 = H_1(x, y) \\ v = x^2 - y^2 = H_2(x, y) \end{cases}$$

Il suit de la définition de D que $\bar{D} = [5, 9] \times [1, 4]$. La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det\big(J_H(x, y)\big) = -8xy\,$.
Soit $G = H^{-1}\colon \bar{D} \to D$ la transformation inverse telle que $(x, y) = G(u, v)$. Pour calculer l'intégrale, on a besoin du Jacobien de G qui est

$$\det\big(J_G(u, v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x, y)\big)} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[-\frac{1}{8xy} \right]_{(x,y)=G(u,v)}$$

Comme $xy \neq 0$ sur D, le jacobien de G est bien défini. L'intégrale est donc

$$\iint_D x^3y^3\,dx\,dy = \iint_{\bar D}\Big[x^3y^3\Big]_{(x,y)=G(u,v)}\cdot\left|\det\left(J_G(u,v)\right)\right|\,du\,dv$$
$$= \iint_{\bar D}\left[x^3y^3\cdot\frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv = \frac{1}{8}\iint_{\bar D}\Big[x^2y^2\Big]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv.$$

Pour exprimer x et y en fonction de u et v, observons que $2x^2 = u+v$ et $2y^2 = u-v$. Ainsi

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}(u+v)(u-v) = \frac{1}{4}(u^2-v^2)$$

et l'intégrale devient

$$\iint_D x^3y^3\,dx\,dy = \frac{1}{32}\int_1^4\int_5^9 (u^2-v^2)\,du\,dv = \frac{1}{32}\int_1^4\left[\frac{1}{3}u^3 - uv^2\right]_{u=5}^{u=9} dv$$
$$= \frac{1}{32}\int_1^4\left(\frac{9^3-5^3}{3} - 4v^2\right)dv = \frac{1}{24}\int_1^4 (151-3v^2)\,dv$$
$$= \frac{1}{24}\Big[151v - v^3\Big]_1^4 = \frac{390}{24} = \frac{65}{4}.$$

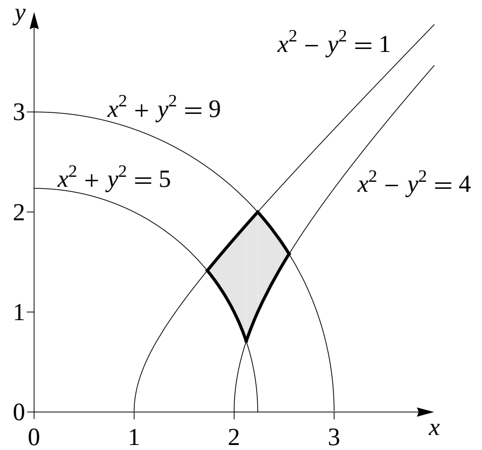

Fig. 1

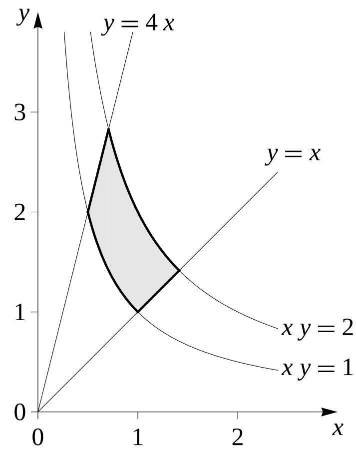

Fig. 2

ii) Le domaine D se trouve dans le premier quadrant (car $x, y \geq 0$) et est délimité d'une part par les droites $y = x$ et $y = 4x$ et d'autre part par les courbes $xy = 1$ et $xy = 2$ (cf. Fig. **??**).
Pour calculer l'intégrale on définit le changement de variable $H\colon D \to \bar D$, où $(u,v) = H(x,y)$ avec

$$\begin{cases} u = xy = H_1(x,y) \\ v = \frac{y}{x} = H_2(x,y) \end{cases}$$

et, par définition de D, $\bar D = [1,2]\times[1,4]$. La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det\big(J_H(x,y)\big) = 2\frac{y}{x}$ qui est bien défini sur D car $x \neq 0$.

Soit $G = H^{-1}\colon \bar{D} \to D$ la transformation inverse telle que $(x,y) = G(u,v)$. Le Jacobien de G est alors

$$\det\big(J_G(u,v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x,y)\big)}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[\frac{x}{2y}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \frac{1}{2v}$$

car $v = \frac{y}{x}$. Comme $v > 0$ sur $\bar{D}$, ce Jacobien est bien défini. Ainsi

$$\iint_D x^2y^2\,dx\,dy = \int_1^4\int_1^2 \frac{u^2}{2v}\,du\,dv = \int_1^4 \frac{1}{2v}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{u=1}^{u=2} dv = \int_1^4 \frac{7}{6}\,\frac{1}{v}\,dv$$
$$= \frac{7}{6}\Big[\ln(v)\Big]_1^4 = \frac{7}{6}\,\ln(4) = \frac{7}{3}\,\ln(2)\,.$$

Exercice 3.

i)

$$\int_0^3 dx \int_{1-\frac{1}{3}x}^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{3-3y}^3 f(x,y)\,dx.$$

Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. **??**.

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 3,\ \ 1-\frac{1}{3}x < y < 1\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 0 < y < 1,\ \ 3-3y < x < 3\}.$$

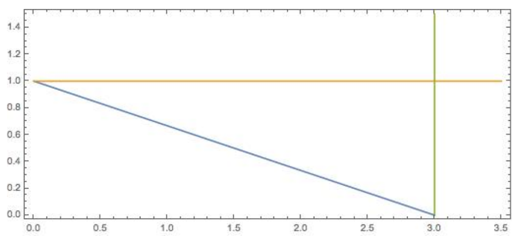

Fig. 3

ii)

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} f(x,y)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{2y-1}^{\frac{1}{y}} f(x,y)\,dx.$$

Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. **??**.

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1,\ \ \frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 1 < x < 2,\ \ \frac{1}{2} < y < \frac{1}{x}\} =$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2} < y < 1,\ \ 2y-1 < x < \frac{1}{y}\}.$$

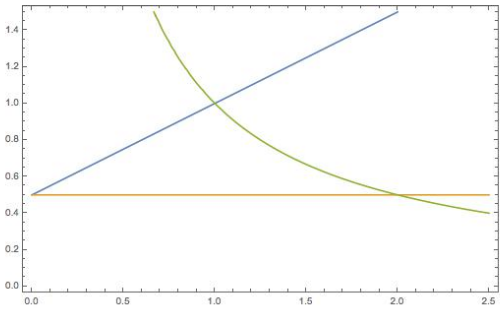

Fig. 4

iii)

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\frac{2}{e}y-\frac{1}{e}}^{e^y} f(x,y)\,dx = \int_{-\frac{1}{e}}^{\frac{1}{e}} dx \int_{-\frac{1}{2}-\frac{e}{2}x}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx \int_{\ln(x)}^{0} f(x,y)\,dy.$$

Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. **??**.

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -1 < y < 0,\ \ -\frac{2}{e}y - \frac{1}{e} < x < e^y\} =$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e},\ \ -\frac{e}{2}x - \frac{1}{2} < y < 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{e} < x < 1,\ \ \ln(x) < y < 0\}.$$

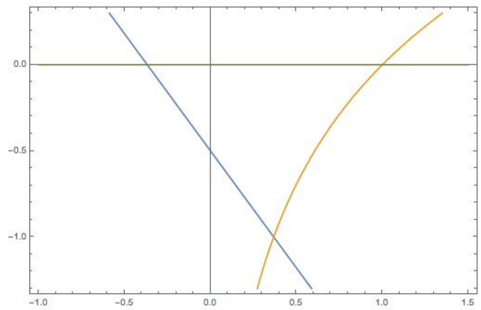

Fig. 5

Exercice 4.

Le volume cherché V est donné par une intégrale triple sur le domaine représenté à la Fig. **??** ci-dessous. Observons que le domaine est défini par les inégalités suivantes :

$$x^2 + z^2 \leq 1\,, \qquad x + y + z \geq 1\,, \qquad 2y - z \leq 6 \qquad \text{et} \qquad z \geq 0\,.$$

A partir de ces contraintes (et en regardant la Fig. **??**), on trouve que les bornes de l'intégrale triple sont

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad 1 - x - z \leq y \leq 3 + \frac{z}{2}\,.$$

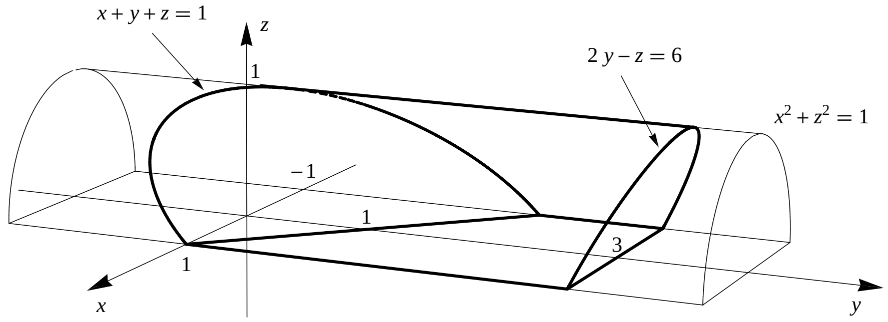

Fig. 6

On a donc

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-x-z}^{3+\frac{z}{2}} dy\,dz\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(3+\frac{z}{2}-(1-x-z)\Big)\,dz\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(2+x+\frac{3}{2}z\Big)\,dz\,dx = \int_{-1}^{1}\Big[(2+x)z+\frac{3}{4}z^2\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\Big((2+x)\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}(1-x^2)\Big)\,dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx\,,$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que la fonction $x\sqrt{1-x^2}$ est impaire et donc son intégrale entre -1 et 1 est nulle.
Pour la première intégrale, on pose le changement de variable $x=\varphi(t)=\sin(t)$ si bien que $\varphi'(t)=\cos(t)$ et la nouvelle variable t varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On trouve alors

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varphi(t)^2}\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\,dt$$

qu'on intègre par parties avec $f'(t)=g(t)=\cos(t)$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\,dt = \Big[\sin(t)\cos(t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)^2\,dt = 0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(1-\cos(t)^2\big)\,dt$$
$$= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\,dt\,.$$

Il s'en suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\,dt = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$V = 2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \pi+\frac{3}{4}\Big[x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} = \pi+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = \pi+1\,.$$

Exercice 5.

On utilise les coordonnées cylindriques (r,φ,z) définies par $G:\bar{D}\to D$ telle que

$$(x,y,z) = G(r,\varphi,z) = \big(\,r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi),\ z\,\big).$$

Le Jacobien est donc

$$J_G(r,\varphi,z) = \det\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r\,.$$

Les équations du cône $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}z-3\right)^2$ et de la sphère $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ s'écrivent en coordonnées cylindriques comme $r^2=\left(\frac{1}{2}z-3\right)^2$ et $r^2+(z-1)^2=25$. A l'extérieur du cône on a alors $r^2\geq\left(\frac{1}{2}z-3\right)^2$ et à l'intérieur de la sphère on a $r^2+(z-1)^2\leq 25$. En combinant ces deux équations on obtient

$$\left(\frac{1}{2}z-3\right)^2+(z-1)^2\leq 25 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}z^2-3z+9+z^2-2z+1\leq 25 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5}{4}z^2-5z-15\leq 0$$
$$\Leftrightarrow\quad z^2-4z-12\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (z+2)(z-6)\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad z\geq -2 \quad\text{et}\quad z\leq 6\,.$$

Ainsi

$$\bar{D}=\left\{(r,\varphi,z)\,:\,0\leq\varphi\leq 2\pi\,,\ 3-\tfrac{1}{2}z\leq r\leq\sqrt{25-(z-1)^2}\,,\ -2\leq z\leq 6\right\}$$

et le volume est donc

$$\iiint_D dx\,dy\,dz = \iiint_{\bar{D}} |J_G(r,\varphi,z)|\,dr\,d\varphi\,dz = \int_{-2}^{6}\int_{\frac{z}{2}-3}^{\sqrt{25-(z-1)^2}}\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\,dr\,dz$$
$$= 2\pi\int_{-2}^{6}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{\frac{z}{2}-3}^{\sqrt{25-(z-1)^2}} dz = \pi\int_{-2}^{6}\left(15+5z-\frac{5}{4}z^2\right)dz$$
$$= 5\pi\left[3z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{12}z^3\right]_{-2}^{6} = 5\pi\left(24+16-\frac{56}{3}\right)=\frac{320\pi}{3}\,.$$

Comme illustration, l'intersection de D avec le plan $x=0$ est représentée à la Fig. **??**.

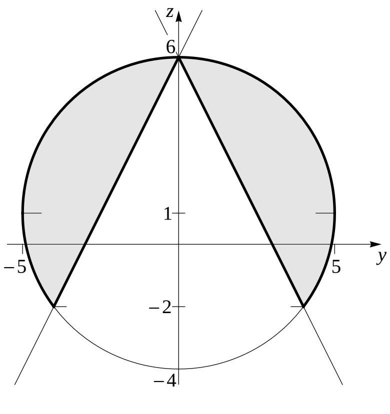

Fig. 7

Exercice 6.

La masse totale du domaine D est donnée par l'intégrale triple

$$I=\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Le domaine est donné par les inégalités

$$0 \le x \le 1\,, \qquad x^2 \le y \le 1 \qquad \text{et} \qquad y \le z \le 1\,,$$

et l'intégrale triple peut donc être exprimée par des intégrales itérées

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(\int_y^1 z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}}\, dz \right) dy \right) dx\,.$$

Pour faciliter l'intégration, on change l'ordre d'intégration. Il faut donc récrire les inégalités en changeant le sens de parcours des régions définies par les deux dernières inégalités (cf. Fig. **??**).

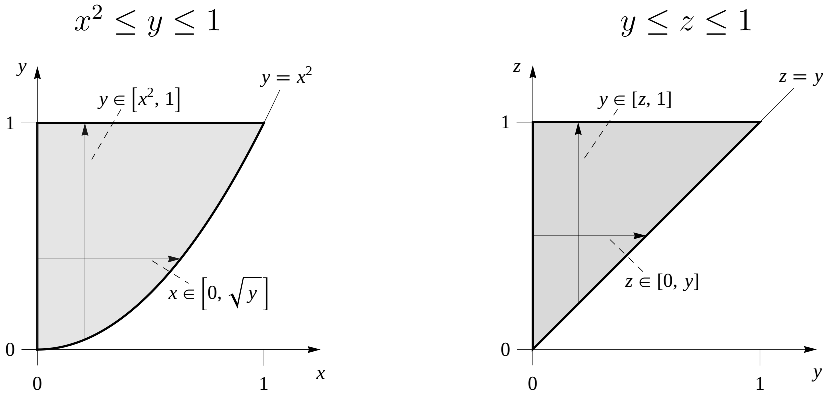

Fig. 8

Les nouvelles inégalités décrivant le domaine D sont

$$0 \le z \le 1\,, \qquad 0 \le y \le z \qquad \text{et} \qquad 0 \le x \le \sqrt{y}\,.$$

L'intégrale triple peut donc aussi être exprimée en terme des intégrales itérées suivantes :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{y}} z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}}\, dx \right) dy \right) dz\,.$$

On a successivement

$$I = \int_0^1 \int_0^z \left[z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} x \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy\, dz = \int_0^1 \int_0^z z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \sqrt{y}\ dy\, dz$$

$$I = \int_0^1 \int_0^z z^{7/2} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \right) \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2} z^{3/2} y^{1/2} \right) e^{-y^{3/2} z^{3/2}}}_{=\varphi'(y)\exp(\varphi(y))} dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \left(z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right) \right]_{y=0}^{y=z} dz = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left[z^2\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right]_{y=0}^{y=z} dz$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2\ e^{-z^3} - z^2 \right) dz$$

et donc

$$I = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2\ e^{-z^3} - z^2 \right) dz = -\frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{-z^3} - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9e}\ .$$