Anna Lachowska
22 mai 2025

Analyse II – Corrigé de la Série 13

Exercice 1.

i) Intégrer d'abord par rapport à x correspond à l'intégrale donnée. On obtient

$$\int_0^1\int_0^2 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^4 - y^{1/3}\, x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$
$$= \int_0^1 \left(4 - 2y^{1/3}\right) dy = \left[4y - \frac{3}{2}y^{4/3}\right]_{y=0}^{y=1} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\,.$$

ii) En inversant l'ordre d'intégration on a

$$\int_0^2\int_0^1 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dy\, dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dy\right) dx = \int_0^2 \left[x^3 y - \frac{3}{4}y^{4/3}\right]_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^2 \left(x^3 - \frac{3}{4}\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x\right]_{x=0}^{x=2} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\,.$$

Les résultats sont les mêmes puisque la fonction qu'on intègre est continue.

Exercice 2.

i) Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 1. On a

$$\int_{-1}^2\int_0^1 \cos(x+y)\, dx\, dy = \int_{-1}^2 \Big[\sin(x+y)\Big]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^2 \big(\sin(1+y) - \sin(y)\big) dy$$
$$= \Big[-\cos(1+y) + \cos(y)\Big]_{-1}^{2} = 1 - \cos(1) + \cos(2) - \cos(3)\,.$$

ii) Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 2. On a

$$\int_0^1\int_x^{2x} e^{x+y}\, dy\, dx = \int_0^1 \Big[e^{x+y}\Big]_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 \big(e^{3x} - e^{2x}\big) dx = \left[\frac{1}{3}\, e^{3x}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{1}{2}\, e^{2x}\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{3}\big(e^3 - 1\big) - \frac{1}{2}\big(e^2 - 1\big) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}\,.$$

Exercice 3.

i) Le domaine D est représenté à la Fig. 3. On a

$$\iint_D \sqrt{x+y}\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^2 \sqrt{x+y}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=2} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\left((2+y)^{3/2} - y^{3/2}\right) dy = \left[\frac{4}{15}\big((2+y)^{5/2} - y^{5/2}\big)\right]_0^1$$
$$= \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1\right).$$

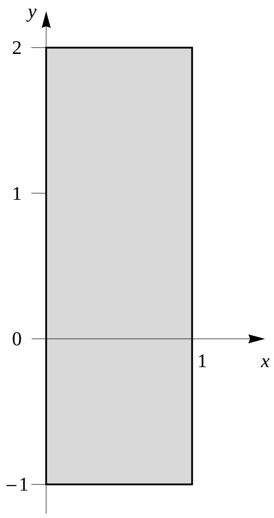

Fig. 1

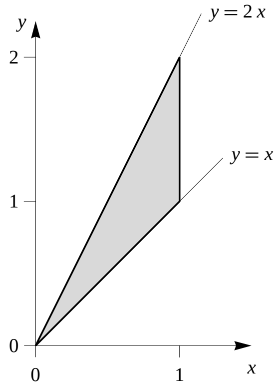

Fig. 2

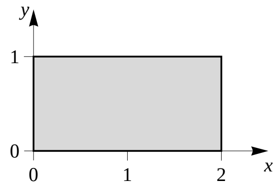

Fig. 3

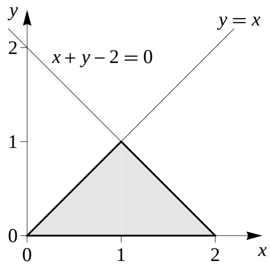

Fig. 4

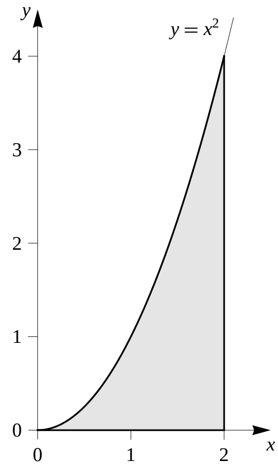

Fig. 5

ii) Le domaine D est représenté à la Fig. 5 ci-dessus. On a

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{x^2} x^2y\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^6\,dx = \left[\frac{1}{14}x^7\right]_0^2 = \frac{64}{7}\,.$$

iii) Le domaine D est représenté à la Fig. 4 ci-dessus. Observons que $x-y \geq 0$ et $x+y-2 \leq 0$ sur D. Ainsi $(x-y)(x+y-2) \leq 0$ et donc $f(x,y) = -(x-y)(x+y-2) = -(x^2-2x-y^2+2y)$. On a

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= -\int_0^1\int_0^x (x^2-2x-y^2+2y)\,dy\,dx - \int_1^2\int_0^{2-x}(x^2-2x-y^2+2y)\,dy\,dx \\
&= -\int_0^1 \left[(x^2-2x)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_{y=0}^{y=x} dx - \int_1^2 \left[(x^2-2x)y - \frac{1}{3}y^3+y^2\right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&\overset{*}{=} -\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2\right) dx - \int_1^2 \left(\frac{2}{3}(2-x)^3 - (2-x)^2\right) dx \\
&= -\left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}(2-x)^4 - \frac{1}{3}(2-x)^3\right]_1^2 \\
&= -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Pour l'étape * on a récrit le premier terme dans la deuxième intégrale comme

$$(x^2-2x)(2-x) = -x(2-x)^2 = \big((2-x)-2\big)(2-x)^2 = (2-x)^3 - 2(2-x)^2$$

pour arriver à

$$(x^2-2x)(2-x) - \frac{1}{3}(2-x)^3 + (2-x)^2 = \frac{2}{3}(2-x)^3 - (2-x)^2$$

et ainsi éviter de développer tous les polynômes.

Exercice 4.

i) En respectant l'ordre d'intégration donné, on doit trouver une primitive de la fonction $e^{(x^2)}$ par rapport à x, ce qui est impossible. Il faut donc inverser l'ordre d'intégration et reparamétriser le domaine D qui est représenté à la Fig. 6 ci-dessous.

Dans l'ordre donné, on parcourt D du bas en haut selon des lignes horizontales. Inverser l'ordre d'intégration revient à parcourir D de gauche à droite selon des lignes verticales. Ainsi x varie entre 0 et 1 et y varie entre 0 et x. On a

$$\int_0^1\int_y^1 e^{(x^2)}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x e^{(x^2)}\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[ye^{(x^2)}\Big]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 xe^{(x^2)}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{(x^2)}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}\,.$$

ii) On doit de nouveau inverser l'ordre d'intégration pour pouvoir calculer cette intégrale. Il faut donc parcourir le domaine D (cf. Fig. 7) de gauche à droite selon des lignes verticales, c'est-à-dire laisser varier x entre 0 et 1 et y entre 0 et x^3.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[y\sqrt{1+x^4}\Big]_{y=0}^{y=x^3} dx = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx\\ &= \int_0^1 \frac{1}{4}\,4x^3(1+x^4)^{1/2}\,dx = \left[\frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right)\end{aligned}$$

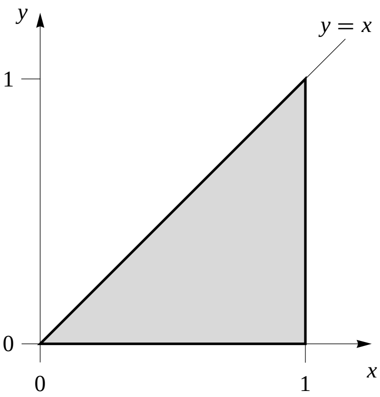

Fig. 6

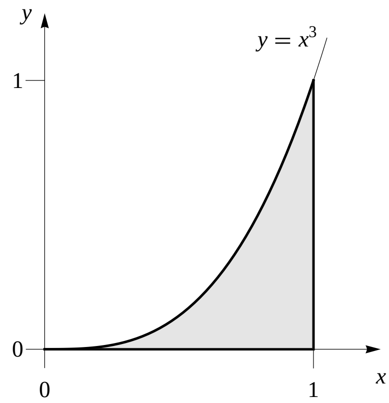

Fig. 7

Exercice 5.

Les points du domaine D satisfont

$$-\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad x-6 \le y \le x\,;$$

on a donc les inégalités

$$\max\big(-\sqrt{x}, x-6\big) \le y \le \min\big(\sqrt{x}, x\big) \qquad \text{et} \qquad x-6 \le \sqrt{x}\,.$$

On fait les calculs :

$$\begin{aligned}x-6 \le -\sqrt{x} \quad &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-6 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) \le 0\\ &\Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{x} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le 4\,,\end{aligned}$$

$$x \le \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{x} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le 1\,,$$

$$x - 6 \leq \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 9\,.$$

Pour $0 \leq x \leq 9$ on a donc

$$\min\big(\sqrt{x}, x\big) = \begin{cases} x & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } \ x > 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max\big(-\sqrt{x}, x-6\big) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } \ 0 \leq x \leq 4 \\ x-6 & \text{si } \ x > 4 \end{cases}$$

c'est-à-dire D est le domaine représenté à la Fig. 8. (*Remarque:* On peut aussi arriver à ces résultats en traçant les graphes, et en cherchant les points d'intersection nécessaires.)

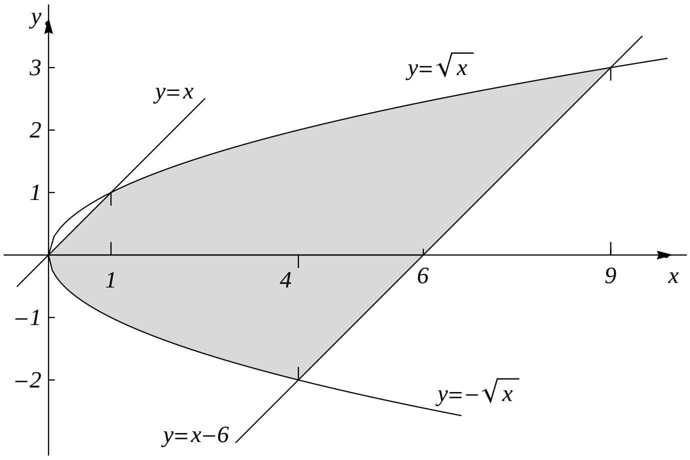

Fig. 8

On peut décomposer le domaine D en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x = 1$ et $x = 4$. L'aire de D est alors

$$\begin{aligned}
\iint_D dx\,dy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{x} dy\,dx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_4^9 \int_{x-6}^{\sqrt{x}} dy\,dx \\
&= \int_0^1 \big(x + \sqrt{x}\big)\,dx + \int_1^4 2\sqrt{x}\,dx + \int_4^9 \big(\sqrt{x} - x + 6\big)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_4^9 \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{32}{3} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{54}{3} - \frac{81}{2} + 54\right) - \left(\frac{16}{3} - 8 + 24\right) = \frac{62}{3}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

i) Pour les coordonnées polaires on a

$$G(r,\theta) = \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)\,,$$

avec $(r,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$. La matrice Jacobienne est

$$J_G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

d'où le Jacobien $\det\big(J_G(r,\varphi)\big) = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 = r\,.$

Comme $H = G^{-1}$, la matrice $J_H(x,y)$ et l'inverse de la matrice $J_G(r,\varphi)$ mais évaluée en $(r,\varphi) = \big(H_1(x,y), H_2(x,y)\big)$. La relation entre les deux Jacobiens est donc

$$\det\big(J_H(x,y)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_G(r,\varphi)\big)}\right]_{(r,\varphi)=H(x,y)} = \left[\frac{1}{r}\right]_{r=\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

où on a utilisé que $H_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ pour les coordonnées polaires.

ii) On utilise les coordonnées polaires sur le domaine $]0,R] \times [0,\alpha[$. Ainsi l'aire du secteur circulaire est

$$\text{aire}(C_{R,\alpha}) = \iint_{C_{R,\alpha}} dx\,dy = \int_0^R\int_0^\alpha r\,d\varphi\,dr = \alpha\int_0^R r\,dr = \alpha\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R = \frac{\alpha}{2}R^2\,.$$

En particulier, si $\alpha = 2\pi$ on retrouve l'aire du cercle du rayon R: $\text{aire}(C_{R,2\pi}) = \pi R^2$.

iii) L'inégalité $(x-1)^2 + y^2 < 1$ décrit le cercle du centre $(1,0)$ et du rayon 1. En particulier, elle implique $x > 0$. Alors on a

$$y = \sqrt{3}x \quad\Longrightarrow\quad \frac{y}{x} = \sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

De façon similaire,

$$y = -\sqrt{3}x \quad\Longrightarrow\quad \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

Donc l'inégalité $-\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x$ se transforme en coordonnées polaires en l'inégalité

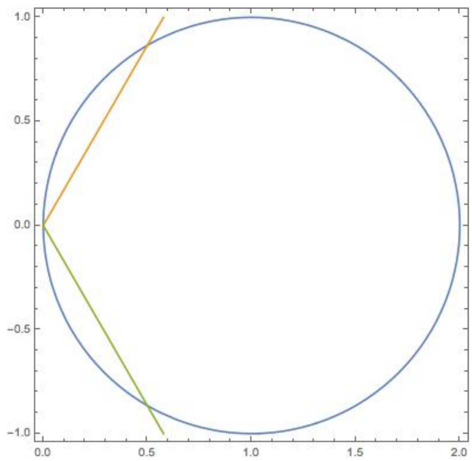

Fig. 9

$-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. L'équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$ implique:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad x^2 + y^2 = 2x \quad\Longrightarrow\quad r^2 = 2r\cos(\varphi) \quad\Longrightarrow\quad r = 2\cos(\varphi).$$

Alors pour calculer l'aire de E, on utilise les coordonnées polaires sur le domaine $\{(r,\varphi) : 0 < r < 2\cos(\varphi),\ -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\}$ (E est le domaine représenté à la Fig. 9). Ainsi l'aire de la région E est

$$\text{aire}(E) = \iint_E dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\left(\int_0^{2\cos(\varphi)} r\,dr\right) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos(2\varphi))\ d\varphi = [\varphi]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 7.

Les équations des droites délimitant le parallélogramme D sont données à la Fig. 10.

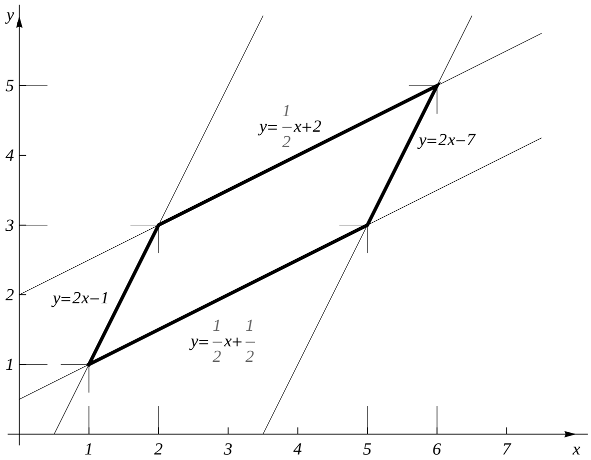

Fig. 10

On décompose le domaine en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x = 2$ et $x = 5$. Ainsi l'aire du parallélogramme est

$$\begin{aligned}\iint_D dx\,dy &= \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2x-1} dy\,dx + \int_2^5 \int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+2} dy\,dx + \int_5^6 \int_{2x-7}^{\frac{1}{2}x+2} dy\,dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) dx + \int_2^5 \frac{3}{2}\,dx + \int_5^6 \left(-\frac{3}{2}x + 9\right) dx \\ &= \frac{3}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^2 + \Big[x\Big]_2^5 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_5^6\right) = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6\,.\end{aligned}$$

Pour calculer l'aire de D par un changement de variable, il est utile de ré-exprimer les équations des droites comme suit : $2x - y = 1\,,\ \ 2x - y = 7$ et $x - 2y = -1\,,\ \ x - 2y = -4\,.$ On définit alors une application H telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = 2x - y = H_1(x, y) \\ v = x - 2y = H_2(x, y) \end{cases}$$

et on voit que l'image de D par H est $\bar{D} = [1, 7] \times [-4, -1]$, c'est-à-dire $H\colon D \to \bar{D}$.
Le matrice Jacobienne de H et son Jacobien sont

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det\big(J_H(x, y)\big) = -3\,.$$

Soit $G = H^{-1}\colon \bar{D} \to D$ la transformation inverse telle que $(x, y) = G(u, v)$. Le Jacobien de G se calcule à partir de $J_H(x, y)$:

$$\det\big(J_G(u, v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x, y)\big)}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = -\frac{1}{3}\,.$$

L'aire du parallélogramme est alors

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{\bar{D}} \big|\det\big(J_G(u, v)\big)\big|\,du\,dv = \int_1^7 \int_{-4}^{-1} \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 = 6\,.$$

Le résultat est évidemment le même qu'avant. C'est à vous de choisir la méthode. Si vous êtes à l'aise avec les jacobiens il est plus rapide d'utiliser un changement de variables adéquat.

En cas particulier d'un parallélogramme on peut également calculer son aire sans intégration en utilisant le produit vectoriel:

$$A = ||\bar{u} \times \bar{v}|| = ||(1,2,0) \times (4,2,0)|| = ||(0,0,2-8)|| = 6.$$