Anna Lachowska
15 mai 2025

Analyse II – Corrigé de la Série 12

Exercice 1.

Soit $F(x,y,z) = xz^2 - 2x^2y + y^2z$. En évaluant F au point $(1,1,z_0)$ on a

$$F(1,1,z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0^2 - 2 + z_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = 1 \ \text{ ou } \ z_0 = -2\,.$$

Selon le cours sur les fonctions implicites, l'équation du plan tangent à la surface $F(x,y,z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est

$$\langle \nabla F(x_0,y_0,z_0), (\bar{r} - \bar{r}_0) \rangle = 0, \qquad \text{où} \quad \bar{r} = (x,y,z) \quad \text{et} \quad \bar{r}_0 = (x_0,y_0,z_0).$$

Puisque

$$\nabla F = (\partial_x F,\, \partial_y F,\, \partial_z F) = \left(z^2 - 4xy,\, -2x^2 + 2yz,\, 2xz + y^2 \right)\,,$$

on a pour le point $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$

$$\nabla F(1,1,1) = (-3,0,3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3(x-1) + 0(y-1) + 3(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = 0\,.$$

Pour $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-2)$ on a

$$\nabla F(1,1,-2) = (0,-6,-3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0(x-1) - 6(y-1) - 3(z+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y + z = 0\,.$$

Exercice 2.

i) On cherche les extremums de la fonction-objectif $f(x,y) = x^3 + y^3$ sous la contrainte $g(x,y) = x^4 + y^4 - 32 = 0$. Notons que $\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = 0$ mais que $g(0,0) \neq 0$ et donc $\nabla g(x,y) \neq 0$ pour tout (x,y) satisfaisant $g(x,y) = 0$.
On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} 3x^2 - 4\lambda x^3 = x^2(3 - 4\lambda x) = 0 & (1) \\ 3y^2 - 4\lambda y^3 = y^2(3 - 4\lambda y) = 0 & (2) \\ -(x^4 + y^4 - 32) = 0 & (3) \end{cases}$$

A partir de (1) et (2) on trouve plusieurs solutions :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ ou } \ \lambda x = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ \text{ ou } \ \lambda y = \frac{3}{4}$$

- Si $x = y = 0$, (3) n'est pas satisfaite, donc impossible.
- Si $x = 0$, alors (3) implique que $y = \pm\sqrt[4]{32} = \pm 2\sqrt[4]{2}$. Il existe alors une valeur de λ pour satisfaire (2).
- Si $y = 0$, alors $x = \pm 2\sqrt[4]{2}$ et (1) peut être satisfaite.
- Si aucune des variables n'est nulle, alors $x = y = \frac{3}{4\lambda}$ par (1) et (2). Par (3) il suit que $2\,\frac{81}{256\,\lambda^4} = 32 \quad \Rightarrow \quad x = y = \pm 2$.

Les solutions du système sont donc

$$(x, y) \in \left\{(0, 2\sqrt[4]{2}), (0, -2\sqrt[4]{2}), (2\sqrt[4]{2}, 0), (-2\sqrt[4]{2}, 0), (2, 2), (-2, -2)\right\}$$

et on a le tableau suivant

(x, y)	$(0, 2\sqrt[4]{2})$	$(0, -2\sqrt[4]{2})$	$(2\sqrt[4]{2}, 0)$	$(-2\sqrt[4]{2}, 0)$	$(2, 2)$	$(-2, -2)$
$f(x, y)$	$8 \cdot 2^{3/4}$	$-8 \cdot 2^{3/4}$	$8 \cdot 2^{3/4}$	$-8 \cdot 2^{3/4}$	16	-16

Puisque le sous-ensemble défini par la contrainte est compact et la fonction est continue, elle atteint son minimum et maximum sous la contrainte. Comme $2^{3/4} < 2$, la valeur maximale de f est 16, atteint en $(2, 2)$, et la valeur minimale est -16, atteint en $(-2, -2)$.

ii) On cherche les extremums de f sur l'ensemble $\Gamma := \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0\}$ avec $g_1(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$ et $g_2(x, y, z) = x-y-1$. Pour montrer que $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, -1, 0)$ sont linéairement indépendants sur Γ, supposons que $\alpha\nabla g_1(x, y, z) + \beta\nabla g_2(x, y, z) = 0$. Du système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta = 0 \\ \alpha y - \beta = 0 \\ \alpha z = 0 \end{cases}$$

il suit que si $\alpha = 0$ alors $\beta = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $z = 0$ et la somme des deux premières équations donne $y = -x$. Observons $g_2(x, -x, 0) = 2x - 1 = 0$ implique $x = \frac{1}{2} = -y$ mais $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \notin \Gamma$ à cause de g_1. Ainsi ∇g_1 et ∇g_2 sont linéairement indépendants sur Γ.
On cherche les solutions du système

$$\begin{aligned} &\nabla f(x, y, z) = \lambda\,\nabla g_1(x, y, z) + \mu\,\nabla g_2(x, y, z) \\ &g_1(x, y, z) = 0 \\ &g_2(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x - \mu = 0 & (1) \\ 1 - 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ 1 - 2\lambda z = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (4) \\ x - y - 1 = 0 & (5) \end{cases}$$

Par (3) on sait que $\lambda \neq 0$ et donc $z = \frac{1}{2\lambda}$. Ensuite

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad 2 - 2\lambda(x + y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = \frac{1}{\lambda} = 2z$$

De plus $(5) \Rightarrow y = x-1$ et donc $z = x - \frac{1}{2}$. On insère ces expressions dans (4)

$$x^2 + (x-1)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0\,,$$

ce qui donne deux solutions :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

et les solutions du système sont

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{6}),\, \frac{1}{6}(-3+\sqrt{6}),\, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{6}), \frac{1}{6}(-3-\sqrt{6}), -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

Puisque le sous-ensemble défini par les contraintes est compact et la fonction est continue, elle atteint son minimum et maximum sous les contraintes. La fonction f admet un maximum en $\left(\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{6}\right), \frac{1}{6}\left(-3+\sqrt{6}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et un minimum en $\left(\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{6}\right), \frac{1}{6}\left(-3-\sqrt{6}\right), -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 3.

On cherche les extremums de $f(x,y,z) = z$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 4x^2+3y^2+2yz+3z^2-4x-1 = 0$. Notons que $\nabla g(x,y,z) = (8x-4, 6y+2z, 2y+6z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = \left(\frac{1}{2},0,0\right)$ mais $g\left(\frac{1}{2},0,0\right) = -2 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ pour tout (x,y,z) tel que $g(x,y,z) = 0$. La condition nécessaire pour $f(x,y,z)$ d'avoir un extremum sous contrainte $g(x,y,z) = 0$ est

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z).$$

Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda(8x-4) = 0 & (1) \\ \lambda(6y+2z) = 0 & (2) \\ 1 - \lambda(2y+6z) = 0 & (3) \\ 4x^2+3y^2+2yz+3z^2-4x-1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Observons que $\lambda \neq 0$ à cause de (3). Par (1) on a alors $x = \frac{1}{2}$ et par (2) on a $z = -3y$, qu'on insère dans (3) pour obtenir $y = -\frac{1}{16\lambda}$. Tout cela inséré dans (4) donne

$$1 + \frac{3}{256\lambda^2} - \frac{6}{256\lambda^2} + \frac{27}{256\lambda^2} - 2 - 1 = \frac{24}{256\lambda^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{12}{256} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{2\sqrt{3}}{16}$$
$$\Rightarrow \quad y = \mp\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ainsi les solutions du système sont

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

Puisque le sous-ensemble défini par la contrainte est compact et la fonction est continue, elle atteint son minimum et maximum sous la contrainte. Alors les valeurs maximale et minimale de z sont $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; elles sont réalisées aux points $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 4.

i) Cherchons d'abord les extremums de f à l'intérieur du domaine $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 32\}$. Ils se trouvent parmi les points stationnaires de f :

$$\begin{cases} f_x = 4x - y - 6 = 0 \\ f_y = -x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

d'où le seul point stationnaire $x_1 = y_1 = 2$.

Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 32$. Alors $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ mais $g(0, 0) \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ sur le bord de D. On peut donc trouver les extremums de f sur le bord de D, qui est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On écrit la condition nécessaire

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

ce qui donne le système d'équations

$$\begin{cases} 4x - y - 6 - 2\lambda x = 0 & (1) \\ -x + 4y - 6 - 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 32 = 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant (1) − (2) on obtient $(x - y)(5 - 2\lambda) = 0$, c.-à-d. $y = x$ ou $\lambda = \frac{5}{2}$.

Si $y = x$, alors on obtient les solutions $x_2 = y_2 = 4$ et $x_3 = y_3 = -4$ de (3).

Si $\lambda = \frac{5}{2}$, alors $y = -(x + 6)$ par (1) et (3) devient $x^2 + 6x + 2 = 0$, d'où on trouve $x_4 = -3 + \sqrt{7}$, $y_4 = -3 - \sqrt{7}$ et $x_5 = -3 - \sqrt{7}$, $y_5 = -3 + \sqrt{7}$.

Les valeurs maximale et minimale de f sur le domaine D sont réalisées parmi les points (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, 5)$. En évaluant f en ces cinq points, on trouve

$$f(x_1, y_1) = -12, \quad f(x_2, y_2) = 0, \quad f(x_3, y_3) = 96, \quad f(x_4, y_4) = 98, \quad f(x_5, y_5) = 98.$$

Ainsi, la valeur minimale de f est -12, atteinte en $(2, 2)$, et la valeur maximale est 98, atteinte en $\left(-3 + \sqrt{7}, -3 - \sqrt{7}\right)$ et $\left(-3 - \sqrt{7}, -3 + \sqrt{7}\right)$.

Dans l'Ex. 3 *ii)* de la Série 11 on a calculé les extremums de la même fonction f sur le demi-disque positif du même rayon, noté ici par D^+. Le minimum de f était atteint en $(2, 2)$ et le maximum en $(-4\sqrt{2}, 0)$. Les extremums de f sur D doivent donc être au moins aussi extrêmes que ceux sur D^+. En l'occurrence, le minimum est le même, mais la fonction f atteint des valeurs plus grandes sur le demi-cercle inférieur que sur D^+ si bien que le maximum a changé.

ii) Soit $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ la boule considérée. On commence par chercher les extremums de f à l'intérieur de D. Les points stationnaires de f satisfont

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y + 2 = 0 \\ f_z = 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \quad \text{est le seul point stationnaire}$$

qui est bien à l'intérieur de D car $1^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \leq 4$.

Pour trouver les extremums de f sur le bord de D, qui est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$, on définit $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ en sorte que le bord de D est l'ensemble $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$. Notons qu'on a $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$ mais $g(0, 0, 0) = -4 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ sur le bord de D.

On introduit la condition
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$
et on résout le système
$$\begin{cases} 2x-2-2\lambda x = 2(1-\lambda)x-2 = 0 & (1)\\ 2y+2-2\lambda y = 2(1-\lambda)y+2 = 0 & (2)\\ 2z-1-2\lambda z = 2(1-\lambda)z-1 = 0 & (3)\\ x^2+y^2+z^2-4 = 0 & (4)\end{cases}$$
Comme $\lambda \neq 1$ (sinon (1) à (3) ne sont pas satisfaites), on peut diviser par $1-\lambda$ pour obtenir à partir de (1) à (3)
$$x = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad y = -\frac{1}{1-\lambda}, \qquad z = \frac{1}{2(1-\lambda)}$$
qu'on met ensuite dans (4) qui devient
$$\frac{2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{4(1-\lambda)^2} - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 9 - 16(1-\lambda)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad (1-\lambda) = \pm\frac{3}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \frac{7}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}.$$
Ainsi on a
$$x_1 = -\frac{4}{3}, \quad y_1 = \frac{4}{3}, \quad z_1 = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4}{3}, \quad y_2 = -\frac{4}{3}, \quad z_2 = \frac{2}{3}.$$
On calcule la valeur de f aux extremums potentiels sur D

(x,y,z)	$\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$
$f(x,y,z)$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{35}{4}$	$-\frac{13}{4}$

Ainsi le minimum de f sur D est $-\frac{7}{2}$, atteint en $\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$, et le maximum est $\frac{35}{4}$, atteint en $\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 5.

i) Soient x et y les longueurs des cathètes d'un triangle rectangle. Son aire est alors $A = \frac{xy}{2}$ et l'hypothénuse est de longueur $\sqrt{x^2+y^2}$. Pour simplifier, on définit une fonction-objectif équivalente, c.-à-d. $f(x,y) = x^2+y^2$ qu'on veut minimiser sous la contrainte $g(x,y) = xy-2A = 0$.

Notons que $\nabla g(x,y) = (y,x) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0)$ mais que $g(0,0) = -2A \neq 0$. Donc $\nabla g(x,y) \neq 0$ pour tout (x,y) satisfaisant $g(x,y) = 0$. La condition nécessaire pour avoir un extremum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ est
$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$
ce qui mène au système
$$\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 & (1)\\ 2y - \lambda x = 0 & (2)\\ xy - 2A = 0. & (3)\end{cases}$$

De (1) on trouve $x = \frac{\lambda}{2}y$, d'où $(2 - \frac{1}{2}\lambda^2)y = 0$ par (2). Si $y = 0$, (3) ne peut être satisfaite, donc on a $\lambda^2 = 4$, ou encore $\lambda = \pm 2$. Ainsi $x = \pm y$ mais comme x, y sont les deux positifs, on doit avoir $x = y$. Il découle alors de (3) que $x = y = \sqrt{2A}$. Par conséquent le triangle rectangle avec hypothénuse minimale est le triangle rectangle isocèle dont chaque cathète vaut $\sqrt{2A}$.

On peut vérifier que $\sqrt{2A}$ est vraiment le minimum de $f(x, y)$. En effet, la fonction à minimaliser est la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ entre l'origine $(0, 0)$ et le point (x, y) qui se trouve sur la branche positive de la courbe hyperbolique $xy = 2A$. Cette distance est croissante et tend vers l'infini lorsque x (ou y) tend vers l'infini. Donc la fonction $\sqrt{x^2 + y^2}$ n'atteint pas son maximum sur la courbe $xy = 2A$ qui n'est pas un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$.

ii) On cherche les extremums de la fonction-objectif $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ (distance du point (x, y, z) à l'origine au carré) sur l'ensemble $\Gamma := \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\}$ avec

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \qquad \text{et} \qquad g_2(x, y, z) = x + y - z + 1.$$

On peut alors montrer que $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, -1)$ sont linéairement indépendants sur Γ par un argument similaire à celui à l'Ex. 1 *ii*).

La condition nécessaire est

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g_1(x, y, z) + \mu \nabla g_2(x, y, z)$$

d'où le système

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - \mu = 2(1 - \lambda)x - \mu = 0 & (1) \\ 2y - 2\lambda y - \mu = 2(1 - \lambda)y - \mu = 0 & (2) \\ 2z + 2\lambda z + \mu = 2(1 + \lambda)z + \mu = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 & (4) \\ x + y - z + 1 = 0 & (5) \end{cases}$$

En faisant (1) − (2) on trouve $2(1 - \lambda)(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ou } x = y\,.$

Si $\lambda = 1$, alors $\mu = 0$ et par (3) on a $z = 0$. Par (4) il suit que $x = y = 0$. Mais $(0, 0, 0)$ ne satisfait pas (5), donc ce n'est pas une solution.

Si $x = y$, alors $z = 2x + 1$ par (5). Pour un point de la forme $(x, x, 2x + 1)$, (4) s'écrit

$$2x^2 + 4x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = y \quad \text{et} \quad z = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Il reste alors à vérifier que ces valeurs de (x, y, z) sont compatibles avec les équations (1) et (3). Pour ceci, insérons les valeurs obtenues dans (1) et (3) et écrivons le tout sous forme matricielle $A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = b$:

$$\begin{cases} 2(1 - \lambda)\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \mu = 0 \\ 2(1 + \lambda)\left(-1 \pm \sqrt{2}\right) + \mu = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} & 1 \\ -2 \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} \\ 2 \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = \pm\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2} = \mp\sqrt{2} \neq 0$, il existe des solutions pour λ et μ (qu'on n'a pas besoin de chercher).

Ainsi les solutions du système $\nabla F = 0$ sont

$$p_1 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad p_2 = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}\right).$$

et

$$f\left(-1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 \pm \sqrt{2}\right) = 2\left(-1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)^2 = 6 \mp 4\sqrt{2}$$

Les deux valeurs p_1 et p_2 réalisent les minima locaux de la fonction $f(x, y, z)$ sur la courbe. Notamment, il est facile à voir que les contraintes impliquent

$$(1 + x + y)^2 = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + 2x + 2y + 2xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + x)(1 + y) = -\frac{1}{2},$$

ce qui est une courbe hyperbolique, et donc la distance entre l'origine et un point sur la courbe $\{x, \frac{1}{2(x+1)} - 1, x + \frac{1}{2(x+1)}\}$ est croissante et tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini. Ainsi la distance de l'origine n'atteint pas son maximum sur la courbe définie par les contraintes, qui n'est pas un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.

Alors p_1 réalise la distance minimale $6 - 4\sqrt{2}$ entre l'origine et la courbe.

Exercice 6.

Observons d'abord que les deux axes de l'ellipse sont les droites qui passent par le centre et les deux points sur l'ellipse dont la distance au centre est maximale respectivement minimale. On cherche donc les extremums de la distance au centre.
Comme l'axe du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ est l'axe z, le centre de l'ellipse se trouve aussi sur l'axe z, i.e. il est de la forme $(0, 0, z)$. De plus, l'ellipse est dans le plan $x + y + 2z = 2$, et donc son centre est $(0, 0, 1)$. On cherche donc les droites qui contiennent les extremums de la fonction $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2,$$

sur $\Gamma = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\}$, où $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$ et $g_2(x, y, z) = x + y + 2z - 2$. On note que puisque le plan donné n'est pas vertical, l'intersection est bien un ellipse qui est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$. Donc la fonction distance de $(0, 0, 1)$ atteint en effet son minimum et maximum sur cet ensemble.
Or, $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 2)$ sont linéairement dépendants seulement en des points $(0, 0, z)$ qui ne sont pas contenus dans le cylindre.
En écrivant $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g_1(x, y, z) + \mu \nabla g_2(x, y, z)$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - \mu = 0 & (1) \\ 2y - 2\lambda y - \mu = 0 & (2) \\ 2z - 2 - 2\mu = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 & (4) \\ x + y + 2z - 2 = 0 & (5) \end{cases}$$

De (1) et (2) on obtient $x = \frac{\mu}{2(1-\lambda)} = y$. Supposons donc pour l'instant que $\lambda \neq 1$, le cas $\lambda = 1$ sera traité après. Par (3) on a

$$z = \mu + 1 \qquad \text{et donc} \qquad x = y = \frac{z - 1}{2(1 - \lambda)}. \tag{6}$$

En récrivant (5) en fonction de z, on a

$$\frac{z-1}{1-\lambda}+2z-2=\left(2+\frac{1}{1-\lambda}\right)(z-1)=0 \qquad \Rightarrow z=1 \text{ ou } \lambda=\frac{3}{2}.$$

Quand $z=1$, il suit de (6) que $x=y=0$. Mais le point $(0,0,1)$ ne satisfait pas (4), donc ce n'est pas une solution.
Quand $\lambda=\frac{3}{2}$, (6) implique que $x=y=1-z$ et si bien que (4) devient

$$2(1-z)^2-4=2(z^2-2z-1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad z=1\pm\sqrt{2}$$

et donc $x=y=\mp\sqrt{2}$.
Lorsque $\lambda=1$, on a $\mu=0$ par (1) et (2), d'où il suit par (3) que $z=1$. De (5) on tire que $x=-y$, qui, inséré dans (4), donne

$$2y^2=4 \qquad \Rightarrow \qquad y=\pm\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad x=\mp\sqrt{2}.$$

Les solutions du système sont donc

$$(x,y,z)\in\left\{(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1+\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{2},1-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2},1),(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)\right\}$$

et on a

$$f(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1+\sqrt{2})=f(\sqrt{2},\sqrt{2},1-\sqrt{2})=6 \qquad \text{et} \qquad f(-\sqrt{2},\sqrt{2},1)=f(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)=4.$$

Ainsi le grand axe de l'ellipse est sur la droite d_1 et le petit axe sur la droite d_2 définies par

$$d_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=t, y=t, z=1-t, t\in\mathbb{R}\}$$
$$d_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=s, y=-s, z=1, s\in\mathbb{R}\}.$$

Noter qu'on a utilisé le centre $(0,0,1)$ de l'ellipse comme point de référence.

Exercice 7.

La surface du cylindre est $S=2\pi r^2+2\pi rh$ et son volume est $V=\pi r^2 h$. On veut donc maximiser la fonction $f(r,h)=\pi r^2 h$ sous la contrainte $g(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh-S=0$. Dans ce cas il n'est pas nécessaire d'appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange puisqu'on peut utiliser la contrainte pour éliminer une des deux variables dans $f(r,h)$. Toutefois, on présente ci-dessous une solution par la méthode de Lagrange ainsi qu'une solution univariée.

Méthode 1: On utilise l'expression de S pour éliminer une des deux variables. En effet,

$$h(r)=\frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}=\frac{S}{2\pi r}-r\,,$$

et donc

$$V(r)=f(r,h(r))=\pi r^2\left(\frac{S}{2\pi r}-r\right)=\frac{S}{2}r-\pi r^3 \qquad \Rightarrow \qquad V'(r)=\frac{S}{2}-3\pi r^2$$

et $V'(r)=0 \Rightarrow r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Comme $V''(r)=-6\pi r<0$, le cylindre ainsi obtenu a bien le volume maximal pour la surface donnée.

Méthode 2: Puisque $f(r,h) = \pi r^2 h$ et $g(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - S$ sont de classe C^1 sur leur domaine, et $\nabla g(r,h) = (4\pi r + 2\pi h, 2\pi r) \neq (0,0)$, on applique le théorème de Lagrange: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(r,h) = \lambda \nabla g(r,h)$$

et on obtient les équations

$$\begin{pmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h - S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(4\pi r + 2\pi h) \\ \lambda(2\pi r) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} rh - 2\lambda r - \lambda h = 0 & (1) \\ r^2 - 2\lambda r = 0 & (2) \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h - S = 0 & (3) \end{cases}$$

Comme $r > 0$, on a

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{r}{2} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \frac{rh}{2} - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 2r \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad 6\pi r^2 = S \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}\ .$$