Anna Lachowska

Analyse II – Corrigé de la Série 11

Dans ce corrigé les lettres $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ dénotent les mineurs principaux (déterminants partiels) de la matrice Hessienne de taille 1×1, 2×2 et 3×3 respectivement.

Exercice 1.

i) Le système

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\sin(x) = 0 \\ f_y(x,y) = 6y = 0 \end{cases}$$

donne les point stationnaires $(x,y) = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -6\cos(x)\,,$$

on a

$$\Lambda_2(k\pi, 0) = \begin{cases} -6, & k \text{ pair} \\ 6, & k \text{ impair} \end{cases}$$

Les points $(k\pi, 0)$ avec k pair sont donc des points selle avec $f(k\pi, 0) = 3$ tandis que pour k impair, l'égalité $\Lambda_1(k\pi, 0) = -\cos(k\pi) = 1 > 0$ implique que f admet des minimums locaux aux points $(k\pi, 0)$ avec $f(k\pi, 0) = 1$ (Fig. 1).

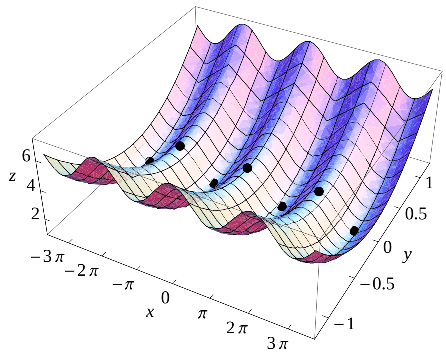

Fig. 1

ii) Comme

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 2x + 2y = 0 \\ f_y(x,y) = -3y^2 + 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 3(x^2 + y^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad (x,y) = (0,0),$$

le seul point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 6x+2 & 2 \\ 2 & -6y+2 \end{pmatrix} = -36xy + 12x - 12y\,,$$

on a $\Lambda_2(0,0) = 0$ ce qui ne permet pas de conclure sur la nature du point stationnaire. Mais comme $f(x,-x) = 2x^3$ et $f(0,0) = 0$, la fonction f prend dans tout voisinage de $(0,0)$ des valeurs positives et négatives; elle admet donc un point selle en $(0,0)$, cf. Fig. 2.

iii) On a

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6x + y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y(x-2y^2) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (0,0),$$

et donc le seul point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. On trouve ensuite

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} -6 & 2y \\ 2y & 2x-12y^2 \end{pmatrix} = 68y^2 - 12x\,, \qquad \text{d'où} \quad \Lambda_2(0,0) = 0\,.$$

En isolant un carré parfait dans $f(x,y)$, on obtient

$$f(x,y) = -3\left(x - \frac{y^2}{6}\right)^2 - \frac{11}{12}y^4 \qquad \text{ou} \qquad f(x,y) = -\frac{11}{4}x^2 - \left(y^2 - \frac{x}{2}\right)^2,$$

ce qui implique $f(x,y) \le 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(0,0) = 0$, la fonction f admet un maximum local en $(0,0)$, cf. Fig. 3.

Remarque: Puisque $f(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; (x,y) = (0,0)$, le maximum de f en $(0,0)$ est absolu.

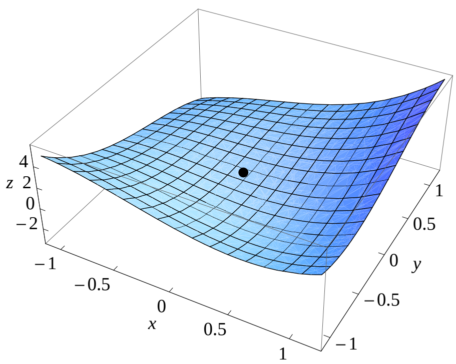

Fig. 2

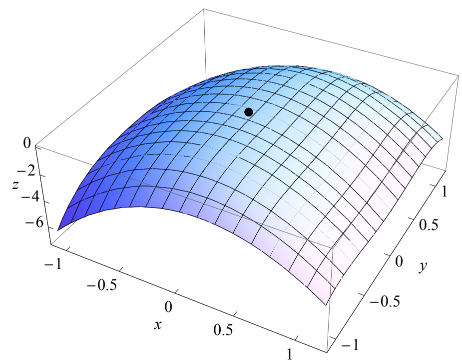

Fig. 3

Exercice 2.

i) On résout le système

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = & -4x & + & 4y & & & = 0 \\ f_y(x,y,z) = & 4x & - & 10y & + & 2z & = 0 \\ f_z(x,y,z) = & & & 2y & - & 2z & = 0 \end{cases}$$

pour obtenir le seul point stationnaire $(0,0,0)$. Ensuite on calcule le hessien et les mineurs principaux dominants de la matrice hessienne:

$$\Lambda_3(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \Lambda_1(x,y,z) = -4.$$

En $(0,0,0)$ on a

$$\Lambda_1(0,0,0) = -4 < 0, \qquad \Lambda_2(0,0,0) = 24 > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_3(0,0,0) = -32 < 0,$$

et donc la fonction f admet un maximum local en $(0,0,0)$ et $f(0,0,0) = 2$.

ii) Pour trouver les points stationnaire, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = & 4x - 3z^2 & = 0 \\ f_y(x,y,z) = & 3y^2 - 3 & = 0 \\ f_z(x,y,z) = & -6xz + 6z & = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 4x - 3z^2 = 0 \\ 3(y^2-1) = 0 \\ -6z(x-1) = 0 \end{cases}$$

Donc $y = \pm 1$ et soit $z = 0$ (ce qui implique $x = 0$), soit $x = 1$ (ce qui implique $z = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$). Les points stationnaires de f sont alors

$$(0,1,0), \quad (0,-1,0), \quad \left(1,1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1,-1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1,1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{et} \quad \left(1,-1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Ensuite on a

$$\Lambda_3(x,y,z) = \det H_f(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6z \\ 0 & 6y & 0 \\ -6z & 0 & -6(x-1) \end{pmatrix} = -72y\big(2(x-1)+3z^2\big),$$

$$\Lambda_2(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 24y \quad \text{et} \quad \Lambda_1(x,y,z) = 4\,.$$

Evaluées aux points stationnaires ces expressions valent

$$\begin{aligned} \Lambda_3(0,1,0) &= 144 > 0, & \Lambda_2(0,1,0) &= 24 > 0 \\ \Lambda_3(0,-1,0) &= -144 < 0, & \Lambda_2(0,-1,0) &= -24 < 0 \\ \Lambda_3\left(1,1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -288 < 0, & \Lambda_2\left(1,1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 24 > 0 \\ \Lambda_3\left(1,-1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 288 > 0, & \Lambda_2\left(1,-1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -24 < 0 \\ \Lambda_3\left(1,1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -288 < 0, & \Lambda_2\left(1,1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 24 > 0 \\ \Lambda_3\left(1,-1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 288 > 0, & \Lambda_2\left(1,-1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -24 < 0 \end{aligned}$$

Comme $\Lambda_1 > 0$, f a un minimum local en $(0,1,0)$ où $f(0,1,0) = 2$, et tous les autres points stationnaires ne sont pas des points d'extremum local (voir théorème du cours, cas $n = 3$).

Exercice 3.

i) Comme la fonction f admet des dérivées partielles partout à l'intérieur du domaine D, ses extremums absolus se trouvent parmi les points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D.

<u>Points stationnaires à l'intérieur de D:</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y) = & 2x & - & y & - & 1 = 0 \\ f_y(x,y) = & -x & + & 2y & - & 1 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (1,1).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_1(x,y) = 2 > 0\,,$$

le point $(1,1)$ est un minimum local de f. De plus on a $f(1,1) = -1$.

<u>Sur le bord de D on a:</u>

Notons d'abord que le bord de D est l'union des trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,0) : 0 \le x \le 3\} \cup \{(0,y) : 0 \le y \le 3\} \cup \{(x, 3-x) : 0 \le x \le 3\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, && 0 \le x \le 3\,,\\
f(0,y) &= y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, && 0 \le y \le 3\,,\\
f(x,3-x) &= 3(x^2 - 3x + 2) = 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right], && 0 \le x \le 3\,.
\end{aligned}$$

L'idée est maintenant de chercher les extremums de ces fonctions unidimensionnelles dans le domaine précisé qui se trouvent soit aux points stationnaires soit aux extrémités du domaine (cf. Analyse I). Notons d'abord $g(x) = f(x,0)$. Alors $g'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Puisque $g''(x) = 2 > 0$, g a un minimum local en $x = \frac{1}{2}$. De plus on a $g(0) = 0$ et $g(3) = 6$. On a donc

$$\max_{0\le x\le 3} f(x,0) = f(3,0) = 6 \qquad \text{et} \qquad \min_{0\le x\le 3} f(x,0) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

De même, on cherche les extremums des fonctions $h(y) = f(0,y)$ et $k(x) = f(x, 3-x)$. La fonction h a exactement le même comportement que g et pour k on a

$$\begin{aligned}
k'(x) &= 6\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3}{2}, \qquad & k\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4},\\
k''(x) &= 6 > 0 \quad (\Rightarrow \text{ minimum local}), \qquad & k(0) = k(3) = 6,
\end{aligned}$$

si bien qu'on obtient

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le y\le 3} f(0,y) = f(0,3) = 6\,, && \min_{0\le y\le 3} f(0,y) = f\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}\,,\\
&\max_{0\le x\le 3} f(x,3-x) = f(3,0) = f(0,3) = 6\,, && \min_{0\le x\le 3} f(x,3-x) = f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que f admet un minimum absolu en $(1,1)$ de valeur $f(1,1) = -1$ et des maximums absolus en $(3,0)$ et en $(0,3)$ de valeur $f(3,0) = f(0,3) = 6$, voir Fig. 4.

ii) Comme f est de classe C^2 sur D, ses extremums absolus se trouvent soit en un point stationnaire à l'intérieur de D, soit sur le bord de D.

<u>Points stationnaires à l'intérieur de D:</u>

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} f_x(x,y) = & 4x & - & y & - & 6 = 0 \\ f_y(x,y) = & -x & + & 4y & - & 6 = 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (2,2).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 15 > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_1(x,y) = 4 > 0\,,$$

le point $(2,2)$ est un minimum local de f. De plus on a $f(2,2) = -12$.

<u>Sur le bord de D on a:</u>

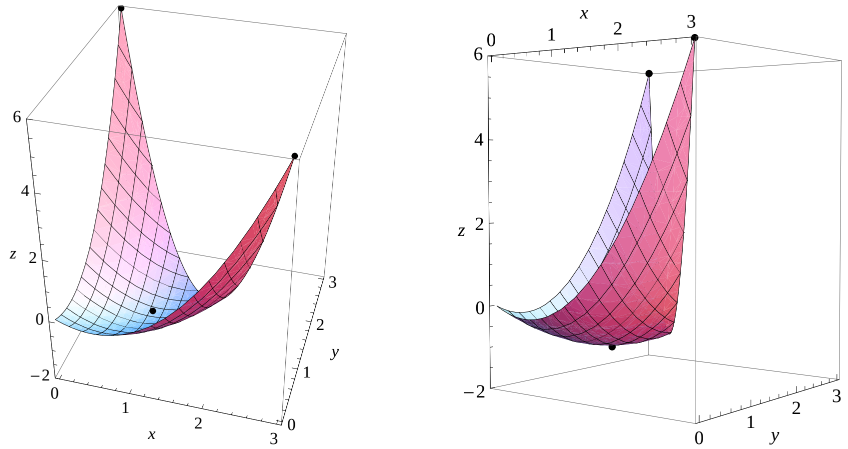

Fig. 4

Le bord de D est l'union des deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{(x,0) : -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}\right\} \cup \left\{(x,\sqrt{32-x^2}) : -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}\right\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$f(x,0) = 2x^2 - 6x = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}, \qquad -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2},$$

$$f(x,\sqrt{32-x^2}) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32-x^2}, \qquad -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}.$$

Sur la première partie du bord (le segment de l'axe x), f atteint son minimum en $x = \frac{3}{2}$ où $f\left(\frac{3}{2},0\right) = -\frac{9}{2}$ et son maximum en $x = -4\sqrt{2}$ où $f\left(-4\sqrt{2},0\right) = 8(8+3\sqrt{2})$. L'autre extrémité $x = 4\sqrt{2}$ n'est pas candidat pour le maximum global de f parce que $f(4\sqrt{2}) < f(-4\sqrt{2})$. Pour la deuxième partie (le demi-cercle), soit $g\colon [-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32-x^2}.$$

Alors g est dérivable sur $]-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}[$, où sa dérivée vaut

$$g'(x) = -6 - \sqrt{32-x^2} + \frac{x(x+6)}{\sqrt{32-x^2}} = \frac{-6\sqrt{32-x^2} - 32 + 2x^2 + 6x}{\sqrt{32-x^2}}.$$

Ainsi

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x - 16 = 3\sqrt{32-x^2} \quad \Rightarrow \quad (x^2+3x-16)^2 = 9(32-x^2)$$
$$\Rightarrow \quad x^4 + 6x^3 - 14x^2 - 96x - 32 = 0 \tag{1}$$

Par l'indication on sait que ce polynôme a des racines entières qui sont en fait $x_1 = 4$ et $x_2 = -4$ (trouvé en essayant). Pour trouver les autres racines, on peut diviser le polynôme obtenu par $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$. On obtient:

$$x^4 + 6x^3 - 14x^2 - 96x - 32 = (x^2 - 16)(x^2 + 6x + 2).$$

Les racines du polynôme $x^2 + 6x + 2$ sont $x_3 = -3 - \sqrt{7}$ et $x_4 = -3 + \sqrt{7}$. Comme on a bien $g'(x_1) = 0$, $x_1 = 4$ est un point stationnaire de g, mais $g'(-4) = -12$, donc ce n'est pas un point stationnaire. Il est facile à voir que $g'(-3 \pm \sqrt{7}) < 0$ et donc les points x_3, x_4

ne sont pas des points stationnaires de g. (En fait, on a obtenu des racines "artificielles" parce qu'on a pris le carré).

La valeur de g en son point stationnaire est $g(4) = 0$. De plus, les points où g' n'existe pas sont aussi des candidats pour les extremums de g. On a $g(-4\sqrt{2}) = 64 + 24\sqrt{2} \approx 97.9$ et $g(4\sqrt{2}) = 64 - 24\sqrt{2} \approx 30.1$.

Ainsi le minimum global de f est atteint en $(2, 2)$ et vaut $f(2, 2) = -12$ et le maximum global est atteint en $(-4\sqrt{2}, 0)$ et vaut $f(-4\sqrt{2}, 0) = 8(8 + 3\sqrt{2})$.

Exercice 4.

Comme les dérivées partielles de f sont continues sur tout le domaine D, les extremums absolus sont atteints aux points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ ne s'annule jamais sur D, la fonction f n'admet aucun point stationnaire.
Puisque le domaine D est un parallélépipède rectangle parallèle aux axes, on peut déterminer le comportement de f sur le bord de D en examinant ses dérivées partielles. Pour $(x, y, z) \in D$ on a :

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = z + 1 > 0 \quad \Rightarrow$ f est croissante dans la direction x et donc maximal en $x = a$ et minimal en $x = 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ f est décroissante dans la direction y et donc maximal en $y = 0$ et minimal en $y = b$.

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x + 2 > 0 \quad \Rightarrow$ f est croissante dans la direction z et donc maximal en $z = c$ et minimal en $z = 0$.

La fonction f a donc son maximum absolu en $(a, 0, c)$ et son minimum absolu en $(0, b, 0)$.
Afin de calculer les valeurs extrémales de f, on doit trouver son expression. A partir des dérivées partielles données, on obtient successivement

$$\partial_y f(x, y, z) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = -y + g(x, z) \quad \Rightarrow \quad \partial_x f(x, y, z) = \partial_x g(x, z) = z + 1$$
$$\Rightarrow \quad g(x, z) = (z + 1)x + h(z) \quad \Rightarrow \quad \partial_z f(x, y, z) = x + h'(z) = x + 2$$
$$\Rightarrow \quad h(z) = 2z + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad g(x, z) = (z + 1)x + 2z + C$$
$$\Rightarrow \quad f(x, y, z) = -y + (z + 1)x + 2z + C$$

La condition $f(0, 0, 0) = 3$ implique alors que $C = 3$ et $f(x, y, z) = (z + 1)x - y + 2z + 3$. Ainsi le maximum absolu de f est $f(a, 0, c) = a(c + 1) + 2c + 3$ et son minimum absolu est $f(0, b, 0) = 3 - b$.
Remarque: On aurait aussi pu calculer l'expression de f dès le départ mais l'approche prise ici est plus instructive.

Exercice 5.

Soit d la distance entre le point $P = (x, y)$ et la droite $x + y = a$ $(a > 0)$. Puisque la distance entre un point et une droite est mesurée dans la direction perpendiculaire à la droite, le point $(x, y) + d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est sur la droite et vérifie donc

$$\left(x + \frac{d}{\sqrt{2}}\right) + \left(y + \frac{d}{\sqrt{2}}\right) = a \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - x - y).$$

Les distances de P aux droites $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement x et y. Par conséquent le produit des distances de P aux trois droites est donnée par la fonction

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, xy(a - x - y), \quad D(f) = \{(x, y) : x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq a\}.$$

Comme on cherche P à l'intérieur du triangle ABC et que la fonction f admet des dérivées partielles en chaque point de $D(f)$, le maximum cherché est atteint en un point stationnaire de f à l'intérieur du domaine.

On résout donc le système

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ay - 2xy - y^2) = 0 & (1) \\[2ex] f_y(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ax - 2xy - x^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

en calculant d'abord $\sqrt{2} \cdot \big((1) - (2)\big)$:

$$x^2 - y^2 - a(x - y) = (x - y)(x + y - a) = 0 \quad \underset{x+y<a}{\Rightarrow} \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

En insérant $x = y$ dans (1), on obtient $ax - 3x^2 = x(a - 3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = \frac{1}{3}\, a$ car on cherche un point à l'intérieur de $D(f)$ (i.e. $x > 0$).

Il reste à vérifier que f atteint un maximum au point $\big(\frac{1}{3}\, a, \frac{1}{3}\, a\big)$. Le hessien de f est

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x, y) = \det\begin{pmatrix} -\sqrt{2}y & \frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x + y) \\ \frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x + y) & -\sqrt{2}x \end{pmatrix} &= 2xy - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x + y)\right)^2 \\ &= -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 2a(x + y) - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

et donc $\Lambda_2\big(\frac{1}{3}\, a, \frac{1}{3}\, a\big) = \frac{1}{6}\, a^2 > 0$ et $\Lambda_1\big(\frac{1}{3}\, a, \frac{1}{3}\, a\big) = -\frac{\sqrt{2}}{3}\, a < 0$.

La fonction f atteint donc son maximum au point $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$ et on a $f\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{54}\, a^3$.

Exercice 6.

i) Comme on veut utiliser le théorème des fonctions implicites, il faut vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites. On commence par calculer les dérivées partielles de F. On a

$$F_x = \partial_x F = 6x^2 - 2xy^4 + 3 \qquad \text{et} \qquad F_y = \partial_y F = -4x^2y^3 + 6y^2\,,$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe C^1. Comme on veut trouver une fonction définie au voisinage de 0, on pose $x_0 = 0$. L'équation $F(0, y_0) = 2y_0^3 - 2 = 0$ implique alors que $y_0 = 1$. De plus $F_y(0, 1) = 6 \neq 0$.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit que l'équation $F(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = 1$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = \frac{6x^2 - 2xf(x)^4 + 3}{4x^2 f(x)^3 - 6f(x)^2}$$

et ainsi $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Le graphe de la fonction f se trouve à la Fig. 5.

ii) Les dérivées partielles de F sont

$$F_x = e^y + y\,e^x \qquad \text{et} \qquad F_y = e^x + x\,e^y\,,$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe C^1. On a de nouveau $x_0 = 0$ et $F(0, y_0) = y_0 + 2 = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = -2$. Comme en plus, $F_y(0, -2) = 1 \neq 0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Ainsi il existe une fonction $y = f(x)$ définie implicitement par l'équation $F(x, y) = 0$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = -2$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{e^{f(x)} + f(x)e^x}{e^x + xe^{f(x)}}\,,$$

et ainsi $f'(0) = 2 - \frac{1}{e^2} \approx 1.865$. Pour le graphe de f, voir Fig. 6.

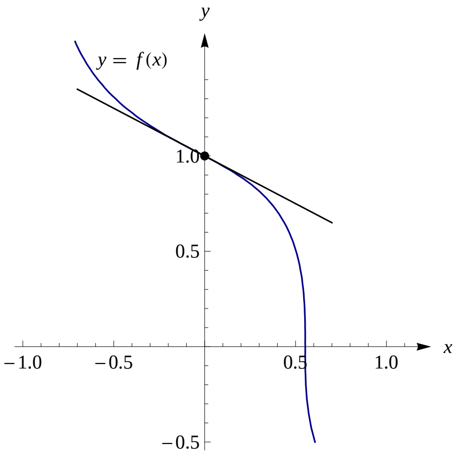

Fig. 5

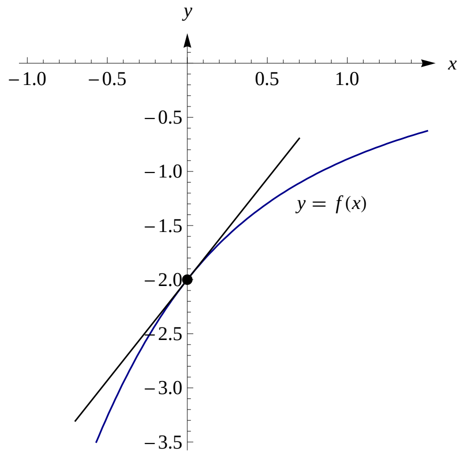

Fig. 6