Anna Lachowska

Analyse II – Corrigé de la Série 10

Exercice 1.

Les développements limités d'ordre n pour une fonction de trois variables s'obtiennent de la formule générale (voir notes du cours 17). Dans la suite on pose $\bar{x} = (x, y, z)$ et $\bar{a} := (x_0, y_0, z_0)$ pour simplifier la notation.

$$f(\bar{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \ldots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \varepsilon(||\bar{x} - \bar{a}||^p),$$

où

$F : I \to \mathbb{R}, \qquad [0, 1] \subset I, \qquad F(t) = f(\bar{a}+t(\bar{x}-\bar{a})) = f(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0))$

et on a écrit le reste sous la forme $\varepsilon(||\bar{x} - \bar{a}||^p)$ satisfaisant $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \frac{\varepsilon(||\bar{x}-\bar{a}||^p)}{||\bar{x}-\bar{a}||^p} = 0$.

i) Pour trouver le développement linéaire de la fonction $f(\bar{x})$ au voisinage de $\bar{a}$ on calcul

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$F'(0) = f_x(\bar{a})(x - x_0) + f_y(\bar{a})(y - y_0) + f_z(\bar{a})(z - z_0).$$

Alors le développement linéaire de la fonction $f(x, y, z)$ au voisinage de $\bar{a}$ est

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + f_x(\bar{a})\,(x - x_0) + f_y(\bar{a})\,(y - y_0) + f_z(\bar{a})\,(z - z_0) + \varepsilon(||\bar{x} - \bar{a}||)\,,$$

ii) La dérivée seconde de F par rapport à t s'écrit sous la forme

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right).$$

Ici on a utilisé le Théorème de Schwarz: pour avoir le développement limité d'ordre 2, la fonction f doit être de classe C^2 dans un voisinage de $\bar{a}$, et donc ses dérivées partielles secondes mixtes sont égales au voisinage de $\bar{a}$. On obtient

$$F''(0) = f_{xx}(\bar{a})\,(x - x_0)^2 + f_{yy}(\bar{a})\,(y - y_0)^2 + f_{zz}(\bar{a})\,(z - z_0)^2 +$$

$$+2f_{xy}(\bar{a})\,(x - x_0)(y - y_0) + 2f_{xz}(\bar{a})\,(x - x_0)(z - z_0) + 2f_{yz}(\bar{a})\,(y - y_0)(z - z_0).$$

Alors le développement d'ordre 2 de la fonction $f(x, y, z)$ au voisinage de $\bar{a}$ est

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & f(\bar{a}) + f_x(\bar{a})\,(x - x_0) + f_y(\bar{a})\,(y - y_0) + f_z(\bar{a})\,(z - z_0) \\ & + \frac{1}{2}f_{xx}(\bar{a})\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(\bar{a})\,(y - y_0)^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(\bar{a})\,(z - z_0)^2 \\ & + f_{xy}(\bar{a})\,(x - x_0)(y - y_0) + f_{xz}(\bar{a})\,(x - x_0)(z - z_0) + f_{yz}(\bar{a})\,(y - y_0)(z - z_0) \\ & + \varepsilon(||\bar{x} - \bar{a}||^2)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 2. Pour référence on rappelle ici la formule de Taylor d'ordre 2 pour une fonction de 2 variables au voisinage de $\bar{a} = (x_0, y_0)$ (voir les notes du cours):

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(\bar{a}) + f_x(\bar{a})\,(x - x_0) + f_y(\bar{a})\,(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} f_{xx}(\bar{a})\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(\bar{a})\,(y - y_0)^2 + f_{xy}(\bar{a})\,(x - x_0)(y - y_0) \\ & + \varepsilon(||\bar{x} - \bar{a}||^2)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

i) D'après la formule (2), le polynôme de Taylor $p_2(x, y)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x, y)$ au voisinage de l'origine est donné par

$$p_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)\,x^2 + f_{xy}(0,0)\,xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)\,y^2.$$

Ici on a

$$\begin{aligned} & f(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1\,, \\ & f_x(x,y) = 2xy + 2y - 5\,, \qquad f_y(x,y) = x^2 + 2x + 6y\,, \\ & f_{xx}(x,y) = 2y\,, \qquad f_{xy}(x,y) = 2x + 2\,, \qquad f_{yy}(x,y) = 6\,, \end{aligned}$$

d'où

$$f(0,0) = 1, \quad f_x(0,0) = -5, \quad f_y(0,0) = 0, \quad f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = 2, \quad f_{yy}(0,0) = 6,$$

et donc

$$p_2(x,y) = 1 + (-5) \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y^2 = 1 - 5x + 2xy + 3y^2.$$

On remarque ici que le résultat est le polynôme donné avec les termes d'ordre plus grand que n enlevés. On peut arriver plus vite au même résultat par la méthode des développements limités (voir Notes du cours 17 et 18):

$$f(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1 = 1 + (-5x + 2xy + 3y^2 + x^2y) = 1 + s,$$

où s est petit. Donc il nous reste d'enlever le terme d'ordre 3 en x, y :

$$p_2(x,y) = 1 - 5x + 2xy + 3y^2.$$

ii) Soit $f(x, y, z) = e^x + y \sinh(z)$. Par la méthode des développements limités il suffit d'utiliser les polynômes de Taylor de la fonction e^x d'ordre 2 et de la fonction $\sinh(z)$ d'ordre 1 (puisque le terme $y \sinh(z)$ contient déjà une puissance de y). On a $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ...$ et $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + ...$ Alors on obtient

$$p_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + yz.$$

On peut trouver le même polynôme par la formule (1), vue à l'Ex. 2: le polynôme de Taylor $p_2(x, y, z)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables autour de l'origine est donné par

$$\begin{aligned} p_2(x,y,z) = {} & f(0,0,0) + f_x(0,0,0)\,x + f_y(0,0,0)\,y + f_z(0,0,0)\,z + \\ & \frac{1}{2} f_{xx}(0,0,0)\,x^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0,0)\,y^2 + \frac{1}{2} f_{zz}(0,0,0)\,z^2 + \\ & f_{xy}(0,0,0)\,xy + f_{xz}(0,0,0)\,xz + f_{yz}(0,0,0)\,yz \end{aligned}$$

Ici on a

$$
\begin{aligned}
&f(x,y,z) = e^x + y\sinh(z)\,, \\
&f_x(x,y,z) = e^x\,, \qquad f_y(x,y,z) = \sinh(z)\,, \qquad f_z(x,y,z) = y\cosh(z)\,, \\
&f_{xx}(x,y,z) = e^x\,, \qquad f_{yy}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{zz}(x,y,z) = y\sinh(z)\,, \\
&f_{xy}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{xz}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{yz}(x,y,z) = \cosh(z)\,,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{gathered}
f(0,0,0) = 1, \quad f_x(0,0,0) = 1, \quad f_y(0,0,0) = 0, \quad f_z(0,0,0) = 0, \quad f_{xx}(0,0,0) = 1, \\
f_{yy}(0,0,0) = 0, \quad f_{zz}(0,0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0,0) = 0 = f_{xz}(0,0,0), \quad f_{yz}(0,0,0) = 1,
\end{gathered}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
f_{DL_2}(x,y,z) &= 1 + 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot y^2 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot z^2 + \\
&\quad 0\cdot xy + 0\cdot xz + 1\cdot yz \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + yz.
\end{aligned}
$$

iii) La méthode de développements limités est avantageuse si la fonction donnée est un polynôme: il nous reste de re-écrire le polynôme donné en forme de polynôme en $(x-a)$ et $(y-b)$ au lieu de x et y, et puis enlever les termes d'ordre plus grand que n. Ici on a $(a,b) = (1,-2)$ et $n = 1$. On obtient dans ce cas:

$$3xy + x^2 - y + 5x - 3 = 3((x-1)+1)((y+2)-2) + ((x-1)+1)^2 - ((y+2)-2) + 5((x-1)+1) - 3 =$$

$$
\begin{gathered}
= 3(x-1)(y+2) + 3(y+2) - 6(x-1) - 6 + (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 - (y+2) + 2 + 5(x-1) + 5 - 3 = \\
= 3(x-1)(y+2) + (x-1)^2 + 2(y+2) + (x-1) - 1. \\
\Longrightarrow\; p_1(x,y) = 2(y+2) + (x-1) - 1 = x + 2y + 2.
\end{gathered}
$$

On peut obtenir le même résultat en utilisant la formule (2) de Taylor: Le polynôme $p_1(x,y)$ d'ordre 1 de $f(x,y)$ au voisinage de $(1,-2)$ est donné par

$$p_1(x,y) = f(1,-2) + f_x(1,-2)\,(x-1) + f_y(1,-2)\,(y+2).$$

Comme

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = 3xy + x^2 - y + 5x - 3\,, \\
&f_x(x,y) = 3y + 2x + 5\,, \qquad f_y(x,y) = 3x - 1\,,
\end{aligned}
$$

et donc

$$f(1,-2) = -1, \quad f_x(1,-2) = 1, \quad f_y(1,-2) = 2\,.$$

Ainsi

$$p_1(x,y) = -1 + (x-1) + 2(y+2) = x + 2y + 2\,.$$

iv) Dans ce cas l'application de la méthode des développements limités exige une analyse plus fine. Il semble plus facile d'utiliser la formule de Taylor directement. On a

$$f(x,y) = \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}+\sin(y)} = \exp\Big(\big(\tfrac{1}{2}+\sin(y)\big)\ln\big(\cos(x)\big)\Big)\,,$$

$$f_x(x,y) = -\big(\tfrac{1}{2}+\sin(y)\big)\big(\cos(x)\big)^{\sin(y)-\frac{1}{2}}\sin(x)\,,$$

$$f_y(x,y) = \ln\big(\cos(x)\big)\big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}+\sin(y)}\cos(y)\,,$$

d'où

$$f\Big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{1}{2}\,, \qquad f_x\Big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad f_y\Big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\ln(2)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p_1(x,y) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(x-\frac{\pi}{3}\Big) - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln(2)\Big(y-\frac{\pi}{6}\Big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{24}\big(\ln(2)+4\big) - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln(2)\,y\,. \end{aligned}$$

Pour l'erreur dans *i*), on a

$$R(x,y) = f(x,y) - p_2(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1 - (1 - 5x + 2xy + 3y^2) = x^2y$$

et donc, en utilisant les coordonnées polaires $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{r^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big(r\cos(\varphi)\big)^2\big(r\sin(\varphi)\big)}{r^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} r\cos(\varphi)^2\sin(\varphi) = 0,$$

puisque $|\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)| \le 1$ quelque soit $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Exercice 3.

i) <u>*Méthode 1*</u>: Les dérivées partielles de la fonction $f(x,y,z)$ sont

$$\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = 2z\,e^{2xz+y}, & f_y(x,y,z) = e^{2xz+y}, & f_z(x,y,z) = 2x\,e^{2xz+y} \\ f_{xx}(x,y,z) = 4z^2\,e^{2xz+y}, & f_{yy}(x,y,z) = e^{2xz+y}, & f_{zz}(x,y,z) = 4x^2\,e^{2xz+y} \\ f_{xy}(x,y,z) = 2z\,e^{2xz+y}, & f_{xz}(x,y,z) = (2+4xz)\,e^{2xz+y}, & f_{yz}(x,y,z) = 2x\,e^{2xz+y} \end{array}$$

et on a

$$\begin{array}{lll} f_x(0,0,0) = 0, & f_y(0,0,0) = 1, & f_z(0,0,0) = 0 \\ f_{xx}(0,0,0) = 0, & f_{yy}(0,0,0) = 1, & f_{zz}(0,0,0) = 0 \\ f_{xy}(0,0,0) = 0, & f_{xz}(0,0,0) = 2, & f_{yz}(0,0,0) = 0 \end{array}$$

Ainsi en utilisant la formule (1) le polynôme de Taylor $p_2(x,y,z)$ d'ordre 2 est

$$p_2(x,y,z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz\,.$$

Méthode 2: On a $f(x, y, z) = g(h(x, y, z))$ avec $g(u) = e^u$ et $h(x, y, z) = 2xz+y$. Puisque $h(0, 0, 0) = 0$, on doit utiliser le développement limité (DL) de g en $u = 0$, c'est-à-dire

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \varepsilon(u^2).$$

On remplace $u = 2xz + y$:

$$f(x, y, z) = 1 + 2xz + y + \frac{(2xz + y)^2}{2} + \varepsilon((2xz + y)^2) = 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + \varepsilon(d^2)\,,$$

où $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On a donc bien retrouvé

$$p_2(x, y, z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz\,.$$

ii) *Méthode 1*: Les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 2\cos(2x + y^2), & f_y(x, y) &= 2y\cos(2x + y^2),\\
f_{xx}(x, y) &= -4\sin(2x + y^2), & f_{yy}(x, y) &= 2\cos(2x + y^2) - 4y^2\sin(2x + y^2),\\
f_{xy}(x, y) &= -4y\sin(2x + y^2)
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
&f_x(1, 1) = 2\cos(3), && f_y(1, 1) = 2\cos(3),\\
&f_{xx}(1, 1) = -4\sin(3), && f_{yy}(1, 1) = 2\cos(3) - 4\sin(3), && f_{xy}(1, 1) = -4\sin(3).
\end{aligned}$$

Par la formule (2) on obtient alors pour le polynôme de Taylor $p_2(x, y)$ d'ordre 2

$$\begin{aligned}
p_2(x, y) &= \sin(3) + 2\cos(3)\,(x - 1) + 2\cos(3)\,(y - 1) + \frac{1}{2}(-4\sin(3))\,(x - 1)^2\\
&\quad + \frac{1}{2}\big(2\cos(3) - 4\sin(3)\big)\,(y - 1)^2 + (-4\sin(3))\,(x - 1)(y - 1)\\
&= \sin(3) + 2\cos(3)\,(x - 1) + 2\cos(3)\,(y - 1) - 2\sin(3)\,(x - 1)^2\\
&\quad + \big(\cos(3) - 2\sin(3)\big)\,(y - 1)^2 - 4\sin(3)\,(x - 1)(y - 1)
\end{aligned}$$

Méthode 2: Puisque le point donné $(1, 1)$ est différent de l'origine, il nous faut réécrire la fonction donnée en forme d'expression en $(x - 1)$ et $(y - 1)$ au lieu de x et y. On a

$$\sin(2x+y^2) = \sin(2((x-1)+1)+((y-1)+1)^2) = \sin(2(x-1)+2+(y-1)^2+2(y-1)+1) =$$

$$= \sin(3 + 2(x - 1) + 2(y - 1) + (y - 1)^2).$$

On a $f(x, y) = g(l(x, y))$ avec $g(u) = \sin(3+u)$ et $u = 2(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2$. Pour pouvoir utiliser les développements limités connus, on applique la formule trigonométrique:

$$\sin(3 + u) = \sin(3)\cos(u) + \cos(3)\sin(u).$$

On utilise alors les DL de $\sin(u)$ et $\cos(u)$ d'ordre 2 autour de $u = 0$:

$$\sin(u) = u + \varepsilon(u^2), \qquad \cos(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \varepsilon(u^2).$$

On remplace $u = 2(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2$ et retient seulement les termes d'ordre ≤ 2:

$$p_2(x,y) = \sin(3)(1-\frac{1}{2}(2(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2)^2)+\cos(3)(2(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2) =$$

$$= \sin(3) + 2\cos(3)\,(x-1) + 2\cos(3)\,(y-1) - 2\sin(3)\,(x-1)^2$$
$$+\big(\cos(3) - 2\sin(3)\big)\,(y-1)^2 - 4\sin(3)\,(x-1)(y-1).$$

Ce résultat correspond bien à celui de la méthode 1.

Exercice 4.

Pour les cas $i) - iv)$ on peut utiliser la matrice hessienne H en $(0,0)$ qui est diagonale. On a :

$i)$ $\det H = 2^2 > 0$ et $H_{11} = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ le point $(0,0)$ est un minimum (en fait global);

$ii)$ $\det H = 2\cdot(-2) < 0 \;\Rightarrow\;$ la fonction n'a pas d'extremum local en $(0,0)$;

$iii)$ $\det H = (-2)\cdot 2 < 0 \;\Rightarrow\;$ la fonction n'a pas d'extremum local en $(0,0)$;

$iv)$ $\det H = (-2)^2 > 0$ et $H_{11} = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ le point $(0,0)$ est un maximum (en fait global).

Pour les cas $v) - viii)$ on ne peut pas utiliser la matrice hessienne parce que celle-ci est nulle.

$v)$ Comme $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0,0)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, le point $(0,0)$ est le minimum global.

$vi)$ Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f(\varepsilon,0) = \varepsilon^4 > 0 = f(0,0) > f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^4$, donc $(0,0)$ n'est pas un point d'extremum local (dans tout voisinage de $(0,0)$ il existent des points $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ tels que $f(\bar{x}_1) < f(0,0) < f(\bar{x}_2)$).

$vii)$ Ce n'est pas un point d'extremum local: $f(-\varepsilon,0) = -\varepsilon^3 < 0 = f(0,0) < f(\varepsilon,0) = \varepsilon^3$ pour tout $\varepsilon > 0$.

$viii)$ $f(x,y) = -(x^4+y^4) < 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, donc $(0,0)$ est le maximum global de f.

Exercice 5.

$i)$ Comme la matrice A est symétrique, il existe une matrice orthogonale O de vecteurs propres de A telle que $A = ODO^T$, où D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A. On a

$$\det(A-\lambda I) = (6-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 7 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Les vecteurs propres satisfont alors

$$A\boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \boldsymbol{v_1} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 6v_{11} - 2v_{21} = 7v_{11} \\ -2v_{11} + 3v_{21} = 7v_{21} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A\boldsymbol{v_2} = \lambda_2 \boldsymbol{v_2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 6v_{12} - 2v_{22} = 2v_{12} \\ -2v_{12} + 3v_{22} = 2v_{22} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour construire la matrice orthogonale O il faut normer les vecteurs propres. Comme $\|\boldsymbol{v_1}\| = \|\boldsymbol{v_2}\| = \sqrt{5}$, on a $O = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$ et donc

$$A = ODO^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}.$$

ii) On a pour le gradient de la fonction $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + \frac{3}{2}y^2$

$$\nabla f = (6x - 2y, 3y - 2x) = (0,0) \qquad \Longrightarrow (x,y) = (0,0),$$

donc le point $(0,0)$ est le seul point stationnaire de f.

Pour la matrice hessienne de f à $(0,0)$ on trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3,$$

et donc $\mathrm{Hess}_f(0,0) = \left(\begin{array}{cc} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{array} \right) = A.$

Puisqu'on a $\det(A) = 18 - 4 = 14 > 0$ et $A_{11} = 6 > 0$, le point $(0,0)$ est un minimum local de f. Autrement, car les valeurs propres de A calculées dans *i)* sont $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 2$, on peut conclure que $(0,0)$ est un point de minimum local.

iii) Soit $(u,v)^T = O^T(x,y)^T$ le changement de variables effectué par la matrice O, alors $(x,y)^T = O(u,v)^T$ est le changement de variables réciproque. On obtient

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}}(-2u + v) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(u + 2v) \end{array} \right)$$

En remplaçant les valeurs $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2u - v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(u + 2v)$ dans la formule pour $f(x,y) = \tilde{f}(u,v)$ on obtient

$$\tilde{f}(u,v) = \frac{3}{5}(-2u+v)^2 - \frac{2}{5}(-2u+v)(u+2v) + \frac{3}{10}(u+2v)^2 =$$

$$= \frac{u^2}{10}(24 + 8 + 3) + \frac{uv}{10}(24 - 12 - 12) + \frac{v^2}{10}(6 - 8 + 12) = \frac{1}{2}(7u^2 + 2v^2).$$

La nature du point stationnaire est claire après le changement de variables: c'est un minimum local.

iv) L'unique point stationnaire de f est $(0,0)$ et on a $\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ qui a les valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -4$. La matrice des vecteurs propres correspondants est

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Il suit que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(4u^2 - 4v^2\right) = 2\left(\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

et à partir de cette expression, il est facile à voir que $(0,0)$ n'est pas un point d'un extremum local de f.