Anna Lachowska

Analyse II – Corrigé de la Série 8

Exercice 1

i) En appliquant directement la définition vue au cours on trouve

$$Df((0,0),\bar{e}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos(\varphi), t\sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cos(\varphi)^2\, t\sin(\varphi)}{t^2} - 0}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \big(\cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)\big) = \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)\,.$$

Les figures ci-dessous montrent le graphe de f (Fig. 1) et celui de la dérivée directionnelle $Df((0,0),\bar{e})$ en fonction de l'angle φ qui détermine la direction autour de l'origine (Fig. 2).

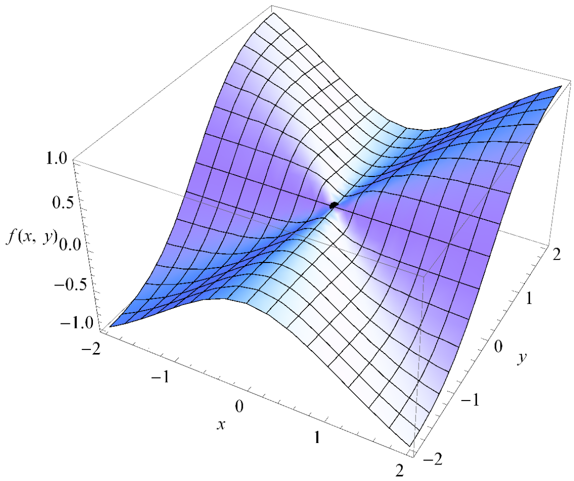

Fig. 1

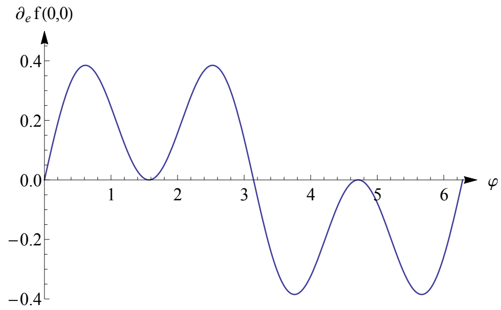

Fig. 2

ii) D'après *i)* pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$ on trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = Df((0,0),(1,0)) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = Df((0,0),(0,1)) = 0$. Donc si f était dérivable en $(0,0)$, on aurait

$$r(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle = f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{||(x,y)||} = 0$. Cependant on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r(\frac{1}{k},\frac{1}{k})}{||(\frac{1}{k},\frac{1}{k})||} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\left(\frac{2}{k^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{(2)^{3/2}}.$$

Alors la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{||(x,y)||}$ ne peut pas être nulle, donc la fonction n'est pas dérivable en $(0,0)$ (voir notes de cours 14).

Exercice 2.

On commence par étudier la continuité de f en $(0,0)$. Comme on a

$$\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)\,,$$

f n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi f n'est pas dérivable en ce point et on doit appliquer la définition pour calculer la dérivée directionnelle. Soit $\bar{e} = (u,v)$ un vecteur unitaire. Alors on a

$$\begin{aligned} Df((0,0),\bar{e}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu,0+tv) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tut^2v^2}{t^2u^2+t^4v^4} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{uv^2}{u^2+t^2v^4} = \begin{cases} \frac{v^2}{u}\,, & u \neq 0 \\ 0\,, & u = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'existence des dérivées directionnelles en un point dans toutes les directions n'est donc pas suffisante pour qu'une fonction soit dérivable en ce point (voir aussi les notes du cours 13).

Exercice 3.

i) Pour une fonction f de classe C^1, la dérivée directionnelle $Df(p_0,\bar{v})$ au point p_0 suivant le vecteur $\bar{v}$ est donnée par

$$Df(p_0,\bar{v}) = \langle \nabla f(p_0)\,,\ \bar{v}\rangle\,.$$

La fonction f donnée est bien C^1 comme une fonction polynome. Puisque

$$\nabla f(x,y,z) = (yz,xz,xy) \qquad \text{et} \qquad \nabla f(1,-1,2) = (-2,2,-1)\,,$$

on obtient

$$Df((1,-1,2),\bar{v}) = \langle (-2,2,-1)\,,\ \frac{1}{3}(2,-1,2)\rangle = -\frac{8}{3}\,.$$

ii) La pente de f en p_0 dans la direction du vecteur unitaire $\bar{u}$ est donnée par la dérivée directionnelle dans cette direction, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} Df(p_0,\bar{u}) = \langle \nabla f(p_0)\,,\ \bar{u}\rangle &= \langle (-2,2,-1)\,,\ \big(\sin(\theta)\cos(\varphi),\sin(\theta)\sin(\varphi),\cos(\theta)\big)\rangle \\ &= 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi)-\cos(\varphi)\big) - \cos(\theta) =: g(\theta,\varphi)\,, \end{aligned}$$

où $g : [0,\pi]\times[0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

iii) On sait du cours qu'en un point où f est dérivable, la pente de la tangente au graphe est maximale (minimale) dans la direction du gradient (opposée au gradient) et qu'elle est égale à (l'opposée de) la norme du gradient. Au point $p_0 = (1,-1,2)$, la pente maximale (minimale) vaut donc

$$\|\nabla f(1,-1,2)\| = 3 \qquad \big(-\|\nabla f(1,-1,2)\| = -3\big).$$

Les directions correspondantes sont $\pm\frac{\nabla f(1,-1,2)}{\|\nabla f(1,-1,2)\|} = \pm\frac{1}{3}(-2,2,-1)$. Pour trouver les angles (θ,φ) donnant lieu à ces directions, on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp\frac{2}{3} \\ \pm\frac{2}{3} \\ \mp\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\theta = \arccos\left(\mp\tfrac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \sqrt{1-\left(\mp\tfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(\varphi) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\varphi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \operatorname{argmax} g(\theta,\varphi) = \left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \frac{3\pi}{4}\right) \\ \operatorname{argmin} g(\theta,\varphi) = \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \frac{7\pi}{4}\right) \end{cases}$$

La pente de f en p_0 est donc maximale pour les angles $(\theta,\varphi) = \left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \frac{3\pi}{4}\right)$ et minimale pour $(\theta,\varphi) = \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \frac{7\pi}{4}\right)$.

Exercice 4.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$ les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = xy\,\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = xy\,\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} + x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ .$$

Pour $(x,y) = (0,0)$, on utilise la définition de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Pour calculer les deuxièmes dérivées partielles mixtes en $(0,0)$, on doit encore une fois utiliser cette définition. On a

$$\partial_y\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-h)-0}{h} = -1\,,$$

$$\partial_x\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = +1.$$

On constate que $\partial_y\partial_x f \neq \partial_x\partial_y f$ en $(0,0)$.

Par le Théorème de Schwarz, si f est de classe C^2 sur E, les deuxièmes dérivées mixtes sont égales en tout point de E. Donc dans ce cas, la fonction n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. D'un autre coté, on constate que la fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ comme une fonction rationnelle sur son domaine de définition, et alors on a par le Théorème de Schwarz $\partial_y\partial_x f(x,y) = \partial_x\partial_y f(x,y) := g(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On peut vérifier directement que la fonction $g(x,y)$ n'admet pas de prolongement par continuité en $(0,0)$.
Remarque: Dans un cas comme ici où les dérivées partielles mixtes ne sont pas égales, il faut faire attention à la notation qui n'est malheureusement pas vraiment standardisée. Lorsqu'on a d'abord dérivé par rapport à x et ensuite par rapport à y, on écrit dans ce cours

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \partial_y\partial_x f\,.$$

Dans la littérature on voit pourtant aussi l'inverse (i.e. x et y échangé). Vive donc les fonctions suffisamment régulières où ce problème ne se pose pas...

Exercice 5.

i) On a que $f(t) = e^{\ln(\ln(t))\cdot\sin(t)}$ et donc

$$\begin{aligned} f'(t) &= f(t) \cdot \left(\frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t) \right) \\ &= (\ln(t))^{\sin(t)} \frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + (\ln(t))^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t) \\ &= (\ln(t))^{\sin(t)-1} \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + (\ln(t))^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t) \ . \end{aligned}$$

ii) On a $h :]1, +\infty[\to (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, $h(t) = (\ln(t), \sin(t))$ et $g : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$, $g(x, y) = x^y$. Alors la fonction composée $(g \circ h) :]1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ est bien définie. On utilise la formule

$$D(g \circ h)(t) = \left[\nabla g(h_1(t), h_2(t)) \right] \cdot \left[h_1'(t), h_2'(t) \right]^T,$$

ce qui est un produit matriciel entre une matrice (1×2) et une matrice (2×1). On obtient

$$\left[h_1'(t), h_2'(t) \right]^T = \left[\frac{1}{t}, \cos(t) \right]^T,$$

$$\nabla g(x, y) = \left[y x^{y-1}, x^y \ln(x) \right] \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ \nabla g(h_1(t), h_2(t)) = \left[\sin(t)(\ln(t))^{\sin(t)-1}, (\ln(t))^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \right].$$

Finalement on obtient

$$D(g \circ h)(t) = \left[\sin(t)(\ln(t))^{\sin(t)-1}, (\ln(t))^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \right] \cdot \left[\frac{1}{t}, \cos(t) \right]^T =$$

$$= \frac{1}{t} \sin(t)(\ln(t))^{\sin(t)-1} + \cos(t)(\ln(t))^{\sin(t)} \ln(\ln(t)),$$

le même résultat qu'on a obtenu dans *i)*.

Exercice 6.

i) On utilise la formule pour la matrice jacobienne de la fonction composée: $J_{f \circ f}(x, y) = J_f(f(x, y)) \cdot J_f(x, y)$. On calcule tout d'abord la matrice $J_f(x, y)$:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver la matrice $J_f(f(x,y))$ on calcule les dérivées partielles des composantes de f par rapport à x et y comme avant, mais après on remplace x par $f_1(x,y) = xy$ et y par $f_2(x,y) = x - y$:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(f_1(x,y), f_2(x,y)) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(f_1(x,y), f_2(x,y)) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & xy \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement on trouve

$$J_{f\circ f}(x,y) = J_f(f(x,y)) \cdot J_f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y & xy \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy - y^2 & x^2 - 2xy \\ \\ y-1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

ii) Comme avant on utilise la formule pour la matrice jacobienne de les fonctions composées $h \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g \circ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, où $g(x,y) = (ye^x,\ xe^y,\ \sin(x-y))^T$ et $h(u,v,w) = uw,\ w^2 - v)^T$. Notamment on a $J_{h\circ g}(x,y) = J_h(g(x,y)) \cdot J_g(x,y)$ et $J_{g\circ h}(u,v,w) = J_g(h(u,v,w)) \cdot J_h(u,v,w)$. On commence par le calcul des matrices $J_g(x,y)$ et $J_h(u,v,w)$:

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ \\ e^y & xe^y \\ \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

$$J_h(u,v,w) = \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ \\ 0 & -1 & 2w \end{pmatrix}.$$

Maintenant pour obtenir la matrice $J_h(g(x,y)$ il faut remplacer $u = g_1(x,y) = ye^x$, $v = g_2(x,y) = xe^y$ et $w = g_3(x,y) = \sin(x-y)$:

$$J_h(g(x,y)) = \begin{pmatrix} \sin(x-y) & 0 & ye^x \\ \\ 0 & -1 & 2\sin(x-y) \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice jacobienne de la fonction composée $g \circ h$ est donnée par

$$J_{h\circ g}(x,y) = J_h(g(x,y)) \cdot J_g(x,y) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(x-y) & 0 & ye^x \\ \\ 0 & -1 & 2\sin(x-y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ \\ e^y & xe^y \\ \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ye^x(\sin(x-y) + \cos(x-y)) & e^x(\sin(x-y) - y\cos(x-y)) \\ \\ -e^y + 2\sin(x-y)\cos(x-y) & -xe^y - 2\sin(x-y)\cos(x-y) \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice jacobienne $J_g(h(u,v,w))$ il faut remplacer $x = h_1(u,v,w) = uw$ et $y = h_2(u,v,w) = w^2 - v$:

$$J_g(h(u,v,w)) = \begin{pmatrix} (w^2-v)e^{uw} & e^{uw} \\ e^{w^2-v} & uwe^{w^2-v} \\ \cos(uw-w^2+v) & -\cos(uw-w^2+v) \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice jacobienne de la fonction composée $h \circ g$ est donnée par

$$J_{g\circ h}(u,v,w) = J_g(h(u,v,w)) \cdot J_h(u,v,w) =$$

$$\begin{pmatrix} (w^2-v)e^{uw} & e^{uw} \\ e^{w^2-v} & uwe^{w^2-v} \\ \cos(uw-w^2+v) & -\cos(uw-w^2+v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & -1 & 2w \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} w(w^2-v)e^{uw} & -e^{uw} & e^{uw}(u(w^2-v)+2w) \\ we^{w^2-v} & -uwe^{w^2-v} & e^{w^2-v}(u+2uw^2) \\ w\cos(uw-w^2+v) & \cos(uw-w^2+v) & (u-2w)\cos(uw-w^2+v) \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas le calcul peut être vérifié directement par le calcul des dérivée partielles des fonctions donnée, par exemple $h \circ g(x,y) = (ye^x \sin(x-y),\ \ \sin^2(x-y) - xe^y)^T$.

Comme la matrice $J_{g\circ h}$ est le produit des matrices 3×2 et 2×3, elle représente la composition d'une transformation linéaire $J_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et la transformation linéaire $J_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Donc le rang d'une telle matrice est au plus 2, et son déterminant est égal à zéro pour tout (u,v,w). Vous pouvez aussi le vérifier directement :-)