Anna Lachowska
28 mars 2024

Analyse II – Corrigé de la Série 6

Exercice 1.

i) En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$ on a

$$0 \leq \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)\right| = \left|r^2\sin\left(\frac{1}{r|\sin(\varphi)|+r|\cos(\varphi)|}\right)\right| \leq r^2.$$

Puisque on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r^2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0$, par les 2 gendarmes on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right) = 0.$$

ii) On a

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2} = 1 \quad \neq \quad \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{t^2} = -1,$$

ce qui implique que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Remarque. Soit $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $\lim_{t\to 0}\phi(t) = l$ implique $\lim_{k\to\infty}\phi(\frac{1}{k}) = l$. (Voir Analyse I). Afin de démontrer que pour une fonction donnée $f(x,y)$, la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas, parfois il est pratique de considerer les limites de la forme $\lim_{t\to 0} f(at^n, bt^m)$, où $a,b\in\mathbb{R}$ et $n,m\in\mathbb{N}_+$. Si on a $\lim_{t\to 0} f(at^n,bt^m) \neq \lim_{t\to 0} f(ct^p,dt^q)$ pour un choix de $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $n,m,p,q\in\mathbb{N}_+$, alors on obtient $\lim_{k\to\infty} f(\frac{a}{k^n},\frac{b}{k^m}) \neq \lim_{k\to\infty} f(\frac{c}{k^p},\frac{d}{k^q})$, ce qui implique que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

iii) On peut passer aux coordonnées sphériques: $\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$. Alors on a

$$|f(x,y,z)-0| = \left|\frac{r^3(\sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)+\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi))}{r^2}\right| \leq$$

$$\leq r(|\sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)| + |\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)|) \leq 2r.$$

Puisque on a $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} r = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$, par le théorème des deux gendarmes on obtient

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz+xz^2}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

iv) En utilisant le changement de variables $t = |x|+|y|$, on obtient

$$f(x,y) = \frac{4-4\cos\sqrt{|x|+|y|}}{|x|+|y|} = \frac{4-4\cos\sqrt{t}}{t},$$

où t converge vers $0+$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Donc il nous faut calculer la limite

$$\lim_{t\to 0+} \frac{4-4\cos\sqrt{t}}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{4(1-\cos\sqrt{t})(1+\cos\sqrt{t})}{t(1+\cos\sqrt{t})} = \lim_{t\to 0+} \frac{4(1-\cos^2\sqrt{t})}{t(1+\cos\sqrt{t})} =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{4\sin^2\sqrt{t}}{t(1+\cos\sqrt{t})} = \lim_{t\to 0+} \left(\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)^2 \frac{4}{1+\cos\sqrt{t}} = 2.$$

Remarque. Cette limite peut être calculée aussi en utilisant le développement limité de $\cos(\sqrt{t})$ pour $t \to 0+$: $\cos\sqrt{t} = 1 - \frac{1}{2!}t + \frac{1}{4!}t^2 - \ldots$.

Finalement on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4-4\cos\sqrt{|x|+|y|}}{|x|+|y|} = 2$.

Exercice 2.

i) En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$ on a

$$3x^3 - 2y^3 = r^3\left(3\cos(\varphi)^3 - 2\sin(\varphi)^3\right) \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2 = r^2$$

et donc

$$f(x,y) = r\left(3\cos(\varphi)^3 - 2\sin(\varphi)^3\right),$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\left(3\cos(\varphi)^3 - 2\sin(\varphi)^3\right) = 0.$$

Il s'en suit que la fonction $\hat{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction f en $(0,0)$. Le graphe de $\hat{f}$ se trouve à la Fig. **??**.

ii) On considère les limites de deux cas particuliers de f:

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{5t^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{10t^2} = \frac{1}{10}.$$

Par conséquent $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'admet donc pas de prolongement par continuité en $(0,0)$ (voir Fig. **??** pour le graphe).

iii) On utilise encore une fois les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r)^2}{r^2(1+\cos(r))} = \lim_{r\to 0} \left(\frac{\sin(r)}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(r)} = \frac{1}{2}$$

La fonction $\hat{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est donc le prolongement par continuité de f en $(0,0)$ (graphe de $\hat{f}$ à la Fig. **??**).

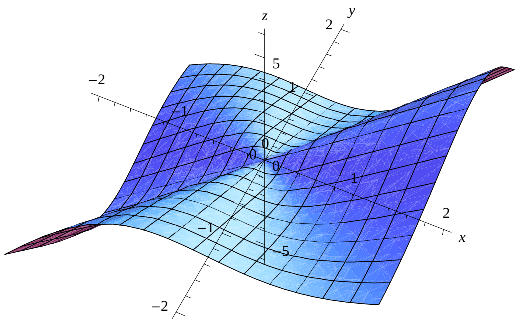

Fig. 1

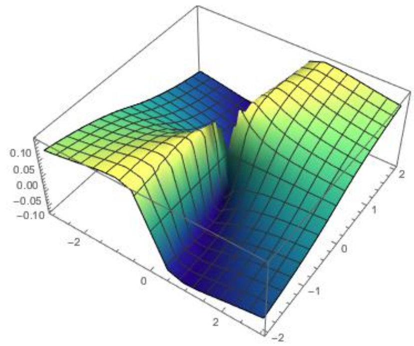

Fig. 2

iv) Comme on a

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} t^2\,\frac{0}{4t^4} = 0\,,$$

on devrait avoir $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ pour qu'un prolongement par continuité de f en $(0,0)$ existe. Or, en considérant la limite $f(2t,t)$ on trouve

$$\lim_{t\to 0} f(2t,t) = \lim_{t\to 0} 2t^2\,\frac{4t^2-t^2}{(4t^2+t^2)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{6t^4}{25t^4} = \frac{6}{25} \neq 0\,.$$

Ainsi f ne peut pas être prolongé par continuité au point $(0,0)$ (voir Fig. **??**).

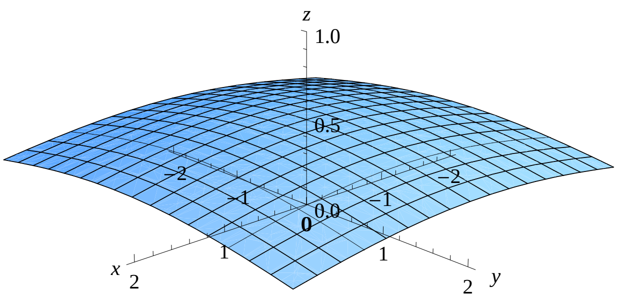

Fig. 3

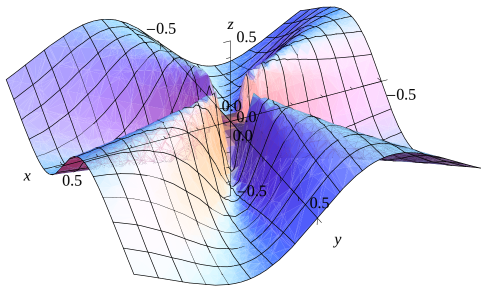

Fig. 4

Exercice 3.

On ne peut pas conclure que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$. Contre-exemple: considérons la fonction $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Alors on a $f(t,mt) = \frac{m^2t^3}{t^2+m^4t^4} = \frac{m^2t}{1+m^4t^2}$. On a pour la limite:

$$\lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0} \frac{m^2t}{1+m^4t^2} = 0$$

pour tout $m \in \mathbb{R}$. Néanmoins, la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. On peut le démontrer en prenant la suite $\{\bar{a}_n\} = \{(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})\}$ qui converge vers $(0,0)$. On a

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Exercice 4.

Q01 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe, alors f est continue en (x_0,y_0).

Réponse: faux. *L'existence de la limite ne suffit pas, il faut en plus que cette limite soit égale à la valeur de f en (x_0,y_0), c'est-à-dire que* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Q02 : Soit une fonction f définie dans un voisinage de $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ (mais pas nécessairement en (x_0,y_0)). Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ existe, alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe.

Réponse: faux. $f(x,y) = \frac{xy-y^2}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0) = (x_0,y_0)$. Alors $f(x,0) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$, mais la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{x^2+y^2}$$

n'existe pas car $\lim_{(t,2t)\to(0,0)} \frac{2t^2-4t^2}{t^2+4t^2} = -\frac{2}{5}$ et $\lim_{(t,t)\to(0,0)} \frac{t^2-t^2}{t^2+t^2} = 0$.

Q03 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit une fonction $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi \in [0, 2\pi[$ telle que

$$\left|f\big(r\cos(\varphi_0), r\sin(\varphi_0)\big)\right| \leq g(r)$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

Réponse: faux. *Contre-exemple : soit* $f(x,y) = 0$ *pour* $y = 0, x \in \mathbb{R}^+$, et $f(x,y) = 1$ *autrement, et soit* $g(r) = 0$ *pour tout* $r \in \mathbb{R}^+$. *Alors pour* $\varphi = 0$ *on a pour tout* $r \in \mathbb{R}^+$,

$$0 = |f(r,0)| = \big|f\big(r\cos(0), r\sin(0)\big)\big| \leq 0 = g(r)\,,$$

mais la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Exercice 5.

i) On a $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, c.-à-d. le plan $\mathbb{R}^2$ sans les deux axes x et y. Les dérivées partielles sont

$$\partial_x f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \partial_y f(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\ .$$

ii) Comme les puissances avec exposant réel sont seulement définies pour des bases positives, on doit avoir $x > 0$ et $y > 0$. Pour z il n'y a pas de restriction si bien que $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$. Pour les dérivées partielles on obtient directement $\partial_x f(x,y,z) = y^z\, x^{(y^z)-1}$. Pour calculer $\partial_y f(x,y,z)$ et $\partial_z f(x,y,z)$ on utilise la formule $(a^x)' = a^x \ln(a)$ et la rgle de dérivée d'une fonction composée:

$$\partial_y f(x,y,z) = x^{y^z}(\ln(x)) \cdot zy^{z-1} = x^{y^z} zy^{z-1}\ln(x).$$
$$\partial_z f(x,y,z) = x^{y^z}(\ln(x))y^z(\ln(y)) = x^{y^z} y^z(\ln(x))(\ln(y)).$$

iii) On a $D(f) = \mathbb{R}^2$. Pour les dérivées partielles on trouve

$$\partial_x f(x,y) = 2xy\cos(x^2y)\cosh(y-x) - \sin(x^2y)\sinh(y-x)$$
$$\partial_y f(x,y) = x^2\cos(x^2y)\cosh(y-x) + \sin(x^2y)\sinh(y-x)$$

iv) Le domaine est $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 2\}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$ sans le plan $z = 2$. Les dérivées partielles sont

$$\partial_x f(x,y,z) = \frac{2}{z-2}\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$
$$\partial_y f(x,y,z) = \frac{6z}{z-2}\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$
$$\partial_z f(x,y,z) = 2\left(\frac{3y}{z-2} - \frac{x+3yz}{(z-2)^2}\right)\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ sont

$$\partial_x{}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \qquad \partial_y\partial_x f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$
$$\partial_x\partial_y f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \qquad \partial_y{}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}\ .$$

Exercice 6

Le gradient ∇f d'une fonction f de deux variables au point (x_0, y_0) est défini par

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Pour simplifier l'écriture, on va omettre le (x_0, y_0) par la suite. On a donc

i)

$$\begin{aligned}\nabla f = \left(\frac{\partial(g+h)}{\partial x},\ \frac{\partial(g+h)}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \nabla g + \nabla h\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\nabla f = \left(\frac{\partial(gh)}{\partial x},\ \frac{\partial(gh)}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\, h + g\, \frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}\, h + g\, \frac{\partial h}{\partial y}\right) \\ &= h\left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}\right) + g\left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y}\right) = h\,\nabla g + g\,\nabla h\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\nabla f = \left(\frac{\partial(g/h)}{\partial x},\ \frac{\partial(g/h)}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x}\, h - g\, \frac{\partial h}{\partial x}}{h^2},\ \frac{\frac{\partial g}{\partial y}\, h - g\, \frac{\partial h}{\partial y}}{h^2}\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{g}{h^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{h\nabla g - g\nabla h}{h^2}\end{aligned}$$