Anna Lachowska

Analyse II – Corrigé de la Série 3

Notation: Dans ce corrigé, l'équation quadratique en λ qui est associée a l'équation différentielle linéaire du second ordre est appelée l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle correspondante.

Exercice 1.

i) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$ (intégration)

ii) $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ $(\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i)$

iii) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ $(\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1)$

iv) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$ $((\lambda - 1)^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 1)$

Remarque: Pour *ii)* et *iii)* il n'est pas nécessaire d'utiliser l'équation caractéristique. On peut aussi constater que les fonctions $\cos(x), \sin(x)$ pour *ii)* et $e^{\pm x}$ pour *iii)* sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation donnée. Ainsi la solution générale est une combinaison linéaire des deux solutions linéairement indépendentes respectives.

Exercice 2.

Pour résoudre ces équations linéaires du second ordre homogènes il faut résoudre l'équation caractéristique associée.

i) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ admet les racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, d'où la solution générale

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{3}x}, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$ admet les racines complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}\left(2 \pm \sqrt{2}i\right)$, d'où la solution générale

$$y(x) = \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)\right) e^{\frac{2}{3}x}, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

iii) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + \frac{4}{3} = 0$ admet la racine double $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$, d'où la solution générale

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\frac{2}{3}x}, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.

Ces équations différentielles sont complètes. La solution générale est donc la somme de la solution générale de l'équation associée homogène ($1^{\text{ère}}$ étape de résolution) et d'une solution particulière de l'équation complète (2^{e} étape).

i) L'équation caractéristique $\lambda^2+4=0$ admet les racines complexes $\lambda_{1,2}=\pm 2i$ si bien que la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_{\text{hom}}(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)\ .$$

Cherchons une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés. Comme $q(x)=3e^{2x}$, et $\lambda=2$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme $y_{\text{part}}=Ae^{2x}$. Donc

$$y''_{\text{part}}+4y_{\text{part}}=3e^{2x}\qquad\Leftrightarrow\qquad(4A+4A)e^{2x}=3e^{2x}\ ,$$

c'est-à-dire $A=\frac{3}{8}$ et $y_{\text{part}}(x)=\frac{3}{8}e^{2x}$. La solution générale est donc

$$y(x)=y_{\text{hom}}(x)+y_{\text{part}}(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+\tfrac{3}{8}e^{2x}\ ,\qquad x,C_1,C_2\in\mathbb{R}\ .$$

ii) Comme au point *i)*, on a $y_{\text{hom}}(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)$. Le membre de droite $q(x)=5\cos(2x)$ est tel que $\lambda=\pm 2i$ est une racine de l'équation caractéristique. On cherche donc un solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}=Ax\cos(2x)+Bx\sin(2x)\ .$$

En reportant cette expression dans l'équation complète, on obtient

$$\begin{gathered}y''_{\text{part}}+4y_{\text{part}}=5\cos(2x)\qquad\Leftrightarrow\\ 4(B-Ax)\cos(2x)-4(A+Bx)\sin(2x)+4Ax\cos(2x)+4Bx\sin(2x)=5\cos(2x)\\ \Leftrightarrow\qquad 4B\cos(2x)-4A\sin(2x)=5\cos(2x)\,,\end{gathered}$$

c'est-à-dire $A=0$ et $B=\frac{5}{4}$. Ainsi $y_{\text{part}}(x)=\frac{5}{4}x\sin(2x)$ et la solution générale devient

$$y(x)=y_{\text{hom}}(x)+y_{\text{part}}(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+\tfrac{5}{4}x\sin(2x)\,,\qquad x,C_1,C_2\in\mathbb{R}\ .$$

iii) Comme $\lambda^2+1=0$ admet les racines $\lambda_{1,2}=\pm i$, on trouve $y_{\text{hom}}(x)=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$. Puisque le membre de droite $q(x)=\frac{1}{\sin(x)}$ n'est pas de forme polynomiale, exponentielle ou trigonométrique, la méthode des coefficients indéterminés ne marche pas. Cherchons une solution particulière de l'équation par la méthode de la variation des constantes:

$$y_{\text{part}}=C_1(x)\cos(x)+C_2(x)\sin(x)\ .$$

Selon le cours, les dérivées C_1' et C_2' satisfont le système linéaire

$$\begin{cases}C_1'\cos(x)+C_2'\sin(x)=0\\ -C_1'\sin(x)+C_2'\cos(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}\end{cases}$$

dont les solutions sont $C_1'=-1$ et $C_2'=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. En intégrant ces expressions, on obtient $C_1=-x$ et $C_2=\ln(|\sin(x)|)$ et ainsi $y_{\text{part}}(x)=-x\cos(x)+\sin(x)\ln(|\sin(x)|)$.

La solution générale est donc (pour $x\in]0,\pi[$ puisque il nous faut choisir un intervalle où $\frac{1}{\sin(x)}$ soit continue):

$$y(x)=y_{\text{hom}}(x)+y_{\text{part}}(x)=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)-x\cos(x)+\sin(x)\ln(|\sin(x)|)\ ,$$
$$x\in]0,\pi[,\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}\ .$$

Exercice 4.

i) L'équation caractéristique de cette équation est $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ qui admet les racines $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$.

Ainsi la solution générale de l'équation donnée est

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \ .$$

ii) <u>*Méthode 1:*</u> *Coefficients indéterminés*

Le membre de droite est $q(x) = 5\sin(3x)$, et $\lambda = \pm 3i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}} = A\sin(3x) + B\cos(3x) \ .$$

En reportant y_{part} dans l'équation différentielle on a

$$y''_{\text{part}} + 2y'_{\text{part}} - 3y_{\text{part}} = (-12A - 6B)\sin(3x) + (6A - 12B)\cos(3x) = 5\sin(3x) \ .$$

Les solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} -12A - 6B &= 5 \\ 6A - 12B &= 0 \end{aligned}$$

sont $A = -\frac{1}{3}$ et $B = -\frac{1}{6}$, et la solution particulière de l'équation donnée est donc

$$y_{\text{part}}(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) \ .$$

<u>*Méthode 2:*</u> *Variation des constantes*

On pose

$$y_{\text{part}} = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-3x}$$

D'après le cours, les fonctions C_1 et C_2 satisfont le système

$$\begin{cases} {C_1}'(x)e^x + {C_2}'(x)e^{-3x} = 0 \\ {C_1}'(x)e^x - 3{C_2}'(x)e^{-3x} = 5\sin(3x) \end{cases}$$

qui a comme solution

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {C_1}'(x) \\ {C_2}'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sin(3x) \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-3x} & e^{-3x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sin(3x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{4} \begin{pmatrix} e^{-x}\sin(3x) \\ -e^{3x}\sin(3x) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ainsi

$$C_1(x) = \frac{5}{4}\int e^{-x}\sin(3x)\, dx \qquad \text{et} \qquad C_2(x) = -\frac{5}{4}\int e^{3x}\sin(3x)\, dx \, . \tag{1}$$

On calcule $\displaystyle\int \sin(3x)e^{ax}\, dx$ en intégrant deux fois par parties:

$$\begin{aligned} \int \sin(3x)e^{ax}\, dx &= \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(3x) - \frac{1}{a}\int 3\cos(3x)e^{ax}\, dx \\ &= \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(3x) - \frac{3}{a^2}\, e^{ax}\cos(3x) - \frac{3}{a^2}\int 3\sin(3x)e^{ax}\, dx \, , \end{aligned}$$

d'où, en isolant l'intégrale,

$$\left(1+\frac{9}{a^2}\right)\int \sin(3x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}\sin(3x) - \frac{3}{a^2}\,e^{ax}\cos(3x)\,,$$

et finalement

$$\int \sin(3x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+9}\Big(a\sin(3x) - 3\cos(3x)\Big)\,. \tag{2}$$

En combinant (**??**) et (**??**), on trouve

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\frac{1}{8}\,e^{-x}\big(\sin(3x) + 3\cos(3x)\big) \qquad (a=-1) \\ C_2(x) &= -\frac{5}{24}\,e^{3x}\big(\sin(3x) - \cos(3x)\big) \qquad (a=3) \end{aligned}$$

et la solution particulière est donc

$$y_{\text{part}}(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,.$$

iii) La solution générale de l'équation complète est donc

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pour satisfaire les conditions initiales on doit avoir

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 1 \\ y'(0) &= C_1 - 3C_2 - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont $C_1 = 1$ et $C_2 = \frac{1}{6}$ si bien que

$$y(x) = e^x + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 5.

1. *i*) (*b*), *ii*) (*d*), *iii*) (*a*), *iv*) (*c*), *v*) (*a*), *vi*) (*d*), *vii*) (*a*), *viii*) (*b*), *ix*) (*c*), *x*) (*d*).
2. *ii*) C'est une équation de la forme $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Une équation de cette forme s'appelle l'équation de Bernoulli (Voir DZ, 12.2.7). Le changement des variables $z = y^{1-\alpha}$ la transforme en équation linéaire du premier ordre, type (*b*) dans la liste (dans notre cas le changement de variable est $z = y^{-1}$).
vi) Cette équation ce transforme en équation à variables séparées (type (*a*) dans la liste) par le changement des variables $z = y + x$.
x) C'est une équation de la forme $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$ Le changement des variables $z = \dfrac{y}{x}$ la transforme en équation à variables séparées (type (*a*) dans la liste).

Exercice 6.

i) Comme y et y_1 sont des solutions de l'équation donnée, on a

$$\left(y_1+\frac{1}{u}\right)'=a\left(y_1+\frac{1}{u}\right)^2+b\left(y_1+\frac{1}{u}\right)+c$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1'-\frac{u'}{u^2}=a\left(y_1^2+2\frac{y_1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)+b\,y_1+b\,\frac{1}{u}+c$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{u'}{u^2}=2a\frac{y_1}{u}+\frac{a}{u^2}+\frac{b}{u} \quad \Leftrightarrow \quad u'+(2ay_1+b)u=-a\ .$$

ii) La méthode de *i*) permet de trouver la solution générale de l'équation différentielle de Riccati

$$y'=-\frac{4}{3x}y^2+\frac{4}{3x}$$

à partir d'une solution particulière trouvée en tâtonnant. Il est facile de chercher une solution constante; en l'occurrence on trouve la solution particulière $y_1=1$.

Posons donc $y=y_1+\frac{1}{u}=1+\frac{1}{u}$. Alors u satisfait l'EDL1

$$u'-\frac{8}{3x}u=\frac{4}{3x}\ . \tag{3}$$

L'équation homogène associée est à variables séparées:

$$\frac{du}{8u}=\frac{dx}{3x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u|=\frac{8}{3}\ln|x|+\ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C}>0 \quad \Leftrightarrow \quad |u|=\tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad u=\pm\tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C}>0 \quad \Leftrightarrow \quad u=\tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C}\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{4}$$

Pour $\tilde{C}=0$, on obtient la fonction triviale qui est aussi solution de l'équation homogène associée à (**??**) si bien que $\tilde{C}\in\mathbb{R}$ dans (**??**).

En observant que $u_{\text{part}}=-\frac{1}{2}$ est une solution particulière de (**??**), on a finalement

$$u(x)=u_{\text{hom}}(x)+u_{\text{part}}(x)=\tilde{C}|x|^{8/3}-\frac{1}{2}, \quad \tilde{C}\in\mathbb{R}, \quad x\in]-\infty,0[\text{ ou } x\in]0,\infty[\ . \tag{5}$$

Pour $\tilde{C}\neq 0$, la solution y de l'équation de Riccati s'écrit

$$y(x)=1+\frac{1}{u(x)}=\frac{\tilde{C}|x|^{8/3}+\frac{1}{2}}{\tilde{C}|x|^{8/3}-\frac{1}{2}}=\frac{|x|^{8/3}+\frac{1}{2\tilde{C}}}{|x|^{8/3}-\frac{1}{2\tilde{C}}}=\frac{|x|^{8/3}+C}{|x|^{8/3}-C}, \quad C\neq 0\ , \tag{6}$$

Cette fonction n'est pas définie lorsque $|x|^{8/3}-C=0$, ce qui peut seulement arriver quand $C>0$ (cf. résumé ci-dessous).

Pour $\tilde{C}=0$ dans (**??**), on a $y(x)=1+\frac{1}{u(x)}=1-2=-1$. La solution particulière $y_1(x)=1$ est obtenue de (**??**) avec $C=0$.

En remarquant que contrairement à (**??**), l'équation de Riccati est aussi définie pour $x=0$, et que la fonction $|x|^{8/3}$ est dérivable en $x=0$, on résume ses solutions:

$$y(x)=\frac{|x|^{8/3}+C}{|x|^{8/3}-C}, \quad C>0, \quad x\in]-\infty,-C^{3/8}[\text{ ou } x\in]-C^{3/8},C^{3/8}[\text{ ou } x\in]C^{3/8},\infty[$$

$$y(x)=\frac{|x|^{8/3}+C}{|x|^{8/3}-C}, \quad C<0, \quad x\in\mathbb{R}$$

$$y(x)=1, \quad x\in\mathbb{R}$$

$$y(x)=-1, \quad x\in\mathbb{R}$$

Remarque. En fait, l'équation donnée est une EDVS:

$$3xy' = 4 - 4y^2$$

On note d'abord les solutions constantes $y(x) = \pm 1$, $x \in \mathbb{R}$. Autrement, on a

$$\frac{1}{4}\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy = \frac{1}{3}\ln|x| + \ln C,$$

où $C > 0$. Alors on obtient par intégration

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln(C|x|^{1/3}).$$

$$\frac{1+y}{1-y} = \pm C|x|^{8/3},$$

ce qui donne la même solution qu'avant, notamment si on pose $B = -\frac{1}{C} \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
&y(x) = \frac{|x|^{8/3}+B}{|x|^{8/3}-B}, && B > 0, && x \in]-\infty, -B^{3/8}[\text{ ou } x \in]-B^{3/8}, B^{3/8}[\text{ ou } x \in]B^{3/8}, \infty[\\
&y(x) = \frac{|x|^{8/3}+B}{|x|^{8/3}-B}, && B < 0, && x \in \mathbb{R}\\
&y(x) = 1, && && x \in \mathbb{R}\\
&y(x) = -1, && && x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$