Analyse II – Corrigé de la Série 2

Exercice 1.

i) La fonction $y(x) = 2$ est solution de l'équation. Pour $y \neq 2$ on a

$$\frac{dy}{dx} = y - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y-2} = dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y-2| = x + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad y - 2 = Ce^x, \qquad C \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = Ce^x + 2\,.$$

Avec $C = 0$, on a $y(x) = 2$. Ainsi la solution générale est $y(x) = Ce^x + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ii) La fonction $y(x) = 0$ est une solution. Pour $y \neq 0$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -xdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad C \neq 0\,.$$

Comme le cas $C = 0$ correspond à $y(x) = 0$, la solution générale est $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

iii) La fonction $y(x) = 0$ est une solution pour $x \in]-\infty, 0[$ et pour $x \in]0, \infty[$. Si $x, y \neq 0$ on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -3\ln|x| + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad |y| = \frac{C}{|x|^3}, \quad C > 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\frac{C}{|x|^3} \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\frac{C}{x^3}\,.$$

Comme $C = 0$ mène à $y(x) = 0$, la solution générale est $y(x) = \dfrac{C}{x^3}$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in]-\infty, 0[$ et pour $x \in]0, \infty[$.

Exercice 2.

i) On procède par séparation des variables. En écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ l'équation devient

$$6(y-1)^2\,dy = x(3x+4)\,dx\,,$$

d'où, par intégration des deux fonctions polynomiales,

$$2(y-1)^3 = x^3 + 2x^2 + \tilde{C}, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

La forme explicite de la solution y est donc

$$y(x) = 1 + f^{-1}\Big(x^2\big(\tfrac{1}{2}x + 1\big) + C\Big), \qquad x \in I,\ C \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $f^{-1}(u)$ est la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ et I est un intervalle ouvert à définir. Comme f est bijective sur $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque f^{-1} est aussi définie sur $\mathbb{R}$, à savoir par

$$f^{-1}(u) = \operatorname{sgn}(u)|u|^{1/3}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en $u = 0$, ce qui fait que l'équation différentielle a plusieurs solutions $y(x)$ de la même forme (1) qui sont définies sur des intervalles ouverts différents. Ces intervalles I dépendent des racines réelles du polynôme $x^2\big(\frac{1}{2}x+1\big)+C$, chaque solution étant définie sur un intervalle ouvert sur lequel ce polynôme est du même signe.

La condition initiale $y(0) = 0$ implique que $0 = 1 + \operatorname{sgn}(C)|C|^{1/3}$, c'est-à-dire $C = -1$. On obtient donc la solution particulière (maximale)

$$y(x) = 1 - \left|x^2\big(\tfrac{1}{2}x+1\big) - 1\right|^{1/3} = 1 - \sqrt[3]{1 - x^2\big(\tfrac{1}{2}x+1\big)}\,, \qquad x \in \,]-\infty, x_0[\,,$$

où $x_0 > 0$ est l'unique solution réelle de l'équation $x^2\big(\frac{1}{2}x+1\big) - 1 = 0$.
(On peut voir que x_0 est l'unique solution et qu'elle est positive par une mini-étude de la fonction $g(x) = x^2\big(\frac{1}{2}x+1\big) - 1$.)

ii) On applique la même méthode:

$$y\,y' - e^{y^2-4x} = 0 \quad\Rightarrow\quad y\,e^{-y^2}dy = e^{-4x}dx \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}e^{-y^2} = -\frac{1}{4}e^{-4x} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\quad e^{-y^2} = \frac{1}{2}e^{-4x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad y^2 = -\ln\left(\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}$$

En fait, la constante C ne peut pas prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$ parce que $y^2 \geq 0$ et le logarithme doit être définie. Mais comme on ne s'intéresse pas à la solution générale ici, il n'est pas nécessaire de trouver le domaine exact de C, il suffira de trouver la valeur de C à partir de la condition initiale et puis le domaine de x en fonction.

La forme explicite de la solution y est alors

$$y(x) = \pm\sqrt{-\ln\big(\tfrac{1}{2}e^{-4x} + C\big)}.$$

La condition initiale $y(0) = \sqrt{\ln(2)}$ implique que le signe est positif, et, de plus,

$$\sqrt{\ln(2)} = +\sqrt{-\ln\big(\tfrac{1}{2} + C\big)} \qquad\Rightarrow\qquad C = 0.$$

La solution particulière pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}$$

qui est à priori définie pour $x \geq -\frac{\ln(2)}{4}$. Or, $y'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x+\ln(2)}}$ n'est pas définie en $x = -\frac{\ln(2)}{4}$. La solution maximale pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}, \qquad x \in \left]-\tfrac{\ln(2)}{4}, \infty\right[\,.$$

iii) On note que $y = 0$ est une solution. Par la séparation de variables on obtient l'EDVS: $\frac{y'}{y+y^3} = \frac{1}{x}$, où $f(y) = \frac{1}{y+y^3}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ sont continues sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. On calcule

$$\frac{y'}{y+y^3} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y+y^3} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} \right) dy = \ln|x| + C_1,$$

où on a décomposé la fonction $\frac{1}{y+y^3}$ en fractions simples. Alors on obtient

$$\ln|y| - \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = \ln|x| + C_1, \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}} = \ln C_2|x|, \quad C_2 \in R_+^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}} = C_2|x|, \quad C_2 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}^*$$

On peut résoudre cette equation pour y:

$$\frac{y^2}{1+y^2} = C^2x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2(1 - C^2x^2) = C^2x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{Cx}{\sqrt{1 - C^2x^2}}.$$

Donc on a les solutions générales:

$$y = \frac{Cx}{\sqrt{1 - C^2x^2}}, \quad x \in \left]-1/|C|, 0\right[\quad \text{et} \quad y = \frac{Cx}{\sqrt{1 - C^2x^2}}, \quad x \in \left]0, 1/|C|\right[.$$

On remarque que l'équation originale $xy' - y = y^3$ admet la valeur $x = 0$ et que la fonction obtenue est de classe C^∞ sur $]-1/|C|, 1/|C|[$. Donc les solutions sur $]-1/|C|, 0[$ et $]0, 1/|C|[$ peuvent être collées pour obtenir la solution générale de l'équation originale (on se souvient aussi de la solution $y = 0$):

$$y = \frac{Cx}{\sqrt{1 - C^2x^2}}, \quad x \in \left]-1/|C|, 1/|C|\right[\quad \text{et} \qquad y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale implique

$$y(1) = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = -1, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - C^2} = -C \quad \Rightarrow \quad 2C^2 = 1, \;\; C < 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La solution maximale pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}, \quad x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[.$$

Exercice 3.

Dans cet exercice il s'agit d'équations différentielles linéaires du premier ordre $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. D'après le cours toute solution $y(x)$ de ce type d'équation s'écrit

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)\,,$$

où $y_{\text{hom}}(x)$ est la solution générale de l'équation homogène et $y_{\text{part}}(x)$ est une solution particulière de l'équation initiale.

i) La solution générale de l'équation homogène s'obtient en séparant les variables (cf. cours). On obtient

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int(-\sin(x))dx} = Ce^{-\cos(x)} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète $y' - y\sin(x) = 4\sin(x)e^{\cos(x)}$ il faut calculer l'intégrale

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} = \int 4\sin(x)e^{\cos(x)}e^{\cos(x)}dx = -2\int e^{2\cos(x)}d(2\cos(x)) =$$

$$= -2e^{2\cos(x)}$$

où on a supprimé la constante puisque l'on cherche une primitive particulière. Alors une solution particulière de l'équation avec second membre est

$$y_{part} = c(x)e^{-\int p(x)dx} = -2e^{2\cos(x)}e^{-\cos(x)} = -2e^{\cos(x)},$$

et la solution générale est

$$y(x) = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = Ce^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \qquad C \in \mathbb{R}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ implique que $C - 2 = 1$, d'où $C = 3$. La solution pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = 3e^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ii) A cause du logarithme dans l'équation, on a $x > 0$, et donc l'équation donnée est équivalente à

$$y' - \frac{1}{x}\,y = 4\ln(x)\,.$$

Comme solution de l'équation homogène, on trouve

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-\int -\frac{1}{x}\,dx} = Ce^{\ln(x)} = C\,x\,, \qquad x > 0, \ C \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière on calcule

$$c(x) = \int 4\ln(x)e^{-\ln(x)}dx = \int 4\ln(x)\frac{dx}{x} = 2\ln^2(x),$$

où on supprime toujours la constante. La solution générale de l'équation complète est

$$y(x) = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = C\,x + c(x)x = C\,x + 2x\ln^2(x), \qquad C \in \mathbb{R}, \ \ x \in]0, \infty[.$$

La solution pour la condition initiale $y(1) = 1$ est

$$y(x) = \left(1 + 2\ln(x)^2\right)x\,, \qquad x \in]0, \infty[.$$

iii) De manière similaire aux points *i*) et *ii*) on trouve

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}, \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète il faut calculer l'intégrale

$$c(x) = \int (10\cos(x) + 2e^{3x})e^{-3x}dx = 10\int e^{-3x}\cos(x)dx \; + \int 2dx =$$

$$= e^{-3x}(\sin(x) - 3\cos(x)) + 2x,$$

où on supprime toujours la constante. Ici pour calculer l'intégrale $\int e^{-3x}\cos(x)dx$ il faut utiliser l'intégration par parties deux fois (voir Analyse I). Ainsi une solution particulière est

$$y_{\text{part}}(x) = c(x)e^{3x} = -3\cos(x) + \sin(x) + 2x\, e^{3x}\,.$$

Par conséquent

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = Ce^{3x} - 3\cos(x) + \sin(x) + 2x\, e^{3x}, \qquad C \in \mathbb{R},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

De plus on a $C = 3$ pour la condition initiale $y(0) = 0$. Donc la solution est

$$y(x) = 3e^{3x} - 3\cos(x) + \sin(x) + 2x\, e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

iv) On a $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver y_{part}, on cherche la fonction

$$c(x) = \int x^3 e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2 e^x dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x.$$

(la constante est toujours supprimée). Par conséquent la solution générale est

$$y(x) = Ce^{-x} + c(x)e^{-x} = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad C \in \mathbb{R},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Pour la condition initiale $y(0) = -2$, on obtient $C = 4$ si bien que la solution est

$$y(x) = 4e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

v) On a $x \neq 0$. On a pour la solution générale de l'équation homogène

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-\int \frac{dx}{x}} = Ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{|x|}, \qquad C \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

Ainsi $y_{\text{hom}}(x) = \dfrac{C}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Pour trouver y_{part}, on cherche la fonction

$$c(x) = \int \frac{1}{x} e^x e^{\ln|x|} dx = \left[\begin{array}{ll} e^x, & x > 0 \\ -e^x & x < 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent la solution particulière est

$$y_{\text{part}}(x) = \left[\begin{array}{ll} e^x \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ -e^x \left(-\dfrac{1}{x}\right), & x < 0 \end{array} \right.$$

ce qui nous donne $y_{\text{part}}(x) = \dfrac{1}{x}e^x$ pour tout $x \neq 0$. Alors la solution générale de l'équation complète est

$$y(x) = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x} \qquad C \in \mathbb{R},\ \ x \neq 0.$$

Pour la condition initiale $y(1) = 0$ on obtient $C = -e$, si bien que la solution est

$$y(x) = \frac{e^x - e}{x}, \qquad x \in]0, \infty[.$$

Ici on a choisi l'intervalle maximale qui contient $x = 1$ (pour satisfaire la condition initiale) et tel que la fonction $y(x)$ est de classe C^1.

Exercice 4.

Observons d'abord que les fonctions constantes $y(x) = 0$ et $y(x) = 1$ sont des solutions pour $x \in \mathbb{R}$.
Si $x, y \neq 0$ et $x, y \neq 1$, l'équation différentielle donnée s'écrit

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x(x-1)} ,$$

puis, en décomposant chaque terme en éléments simples:

$$\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx .$$

En intégrant les deux côtés on obtient

$$\begin{aligned} -\ln|y| + \ln|y-1| &= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \qquad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln(\tilde{C}) \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{y-1}{y}\right| &= \tilde{C}\left|\frac{x-1}{x}\right| \quad \tilde{C} > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

L'équation (2) est équivalente à

$$\frac{y-1}{y} = C\,\frac{x-1}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} , \tag{3}$$

car, si un couple (x, y) satisfait l'équation (2) pour un certain $\tilde{C}$, il satisfait aussi l'équation (3) avec $C = \tilde{C}$ ou $C = -\tilde{C}$, et si un couple (x, y) satisfait l'équation (3) pour un certain C, il satisfait aussi l'équation (2) pour $\tilde{C} = |C|$.
A partir de (3) on trouve l'expression explicite de y en fonction de x,

$$Cy(x-1) = x(y-1) \qquad \Rightarrow \qquad y(Cx - C - x) = -x \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = \frac{x}{(1-C)x + C} .$$

Pour $C \neq 0$ et $C \neq 1$ la fonction $y(x)$ définit deux solutions, une sur l'intervalle $\left]-\infty, \frac{C}{C-1}\right[$ et une sur l'intervalle $\left]\frac{C}{C-1}, \infty\right[$. (Le dénominateur de y s'annule en $x = \frac{C}{C-1}$ dans ce cas.)
Pour $C = 0$, on a $y(x) = 1$ et pour $C = 1$, on a $y(x) = x$. Tout comme la solution triviale $y(x) = 0$, ces deux solutions sont définies pour $x \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation donnée est donc

$$\begin{array}{lll} y(x) = \dfrac{x}{(1-C)x + C}, & C \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, & x \in \left]-\infty, \frac{C}{C-1}\right[\text{ ou } x \in \left]\frac{C}{C-1}, \infty\right[, \\ y(x) = 1, & C = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = x, & C = 1, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = 0, & \text{-} & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Pour trouver les solutions particulières pour les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ données, on met la condition initiale dans la solution générale et on résout pour C. Les solutions sont:

$$\begin{array}{lllllll} x_0 = -1,\ y_0 = -1 & \Rightarrow & C = 1 & \Rightarrow & y = x, & & x \in \mathbb{R} \\ x_0 = -1,\ y_0 = 1 & \Rightarrow & C = 0 & \Rightarrow & y = 1, & & x \in \mathbb{R} \\ x_0 = 2,\ y_0 = 4 & \Rightarrow & C = \frac{3}{2} & \Rightarrow & y = \frac{2x}{3-x}, & & x \in]-\infty, 3[^* \\ x_0 = 2,\ y_0 = -4 & \Rightarrow & C = \frac{5}{2} & \Rightarrow & y = \frac{2x}{5-3x}, & & x \in]\frac{5}{3}, \infty[^* \end{array}$$

*On a choisi l'intervalle qui contient x_0.

Voici le graphique des solutions (les points correspondent aux conditions initiales):