Anna Lachowska
20 février 2025

Analyse II – Corrigé de la Série 1

Exercice 1.

Les solutions sont :

i) $y(x) = x^2 + C$ pour $x, C \in \mathbb{R}$ (obtenue par intégration)

ii) $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + C_1x + C_2$ pour $x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (obtenue par intégration)

iii) $y(x) = -3\sin x + C_1x + C_2$ pour $x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (obtenue par intégration)

Exercice 2.

i) En écrivant $y' = \frac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée, celle-ci devient

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \lambda dx\,.$$

On intègre alors des deux côtés et on obtient pour $x \in \mathbb{R}$

$$\log|y| = \lambda x + \tilde{C} \qquad \text{avec } \tilde{C} \in \mathbb{R}\,,$$

c'est-à-dire

$$|y(x)| = e^{\tilde{C}}e^{\lambda x}\ , \quad \text{i.e.} \qquad y(x) = Ce^{\lambda x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}\ .$$

Notez qu'on peut avoir $C \leq 0$ (même si $e^{\tilde{C}} \in \mathbb{R}_+$) parce qu'on a module de $y(x)$ dans la formule précédente et la fonction $y(x) = 0$ est aussi une solution de l'équation.

Remarque: Une équation différentielle de cette forme décrit une croissance (si $\lambda > 0$) ou décroissance (si $\lambda < 0$) exponentielle, un phénomène qui apparaît souvent dans la nature.

ii) Les fonctions constantes $y(x) = 0$ et $y(x) = 5$ pour $x \in \mathbb{R}$ sont des solutions. On trouve les autres solutions par séparation des variables. Pour $y \neq 0$ et $y \neq 5$, on écrit (comme précédemment)

$$\frac{dy}{2y(5-y)} = dx$$

et on intègre des deux côtés. Pour intégrer le membre de gauche, on le décompose d'abord en éléments simples:

$$\frac{1}{2y(5-y)} = \frac{A}{2y} + \frac{B}{(5-y)}.$$

Pour trouver A et B, on met au même dénominateur:

$$\frac{1}{2y(5-y)} = \frac{A(5-y) + 2By}{2y(5-y)} \qquad \Rightarrow \qquad y(2B-A) + 5A = 1.$$

Donc il faut avoir $2B - A = 0$ et $5A = 1$, d'où

$$A = \frac{1}{5} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{10}\,,$$

et donc
$$\frac{1}{2y(5-y)} = \frac{1}{10y} + \frac{1}{10(5-y)} \,.$$
L'intégrale écrite sous cette forme se calcule facilement et mène à l'équation
$$\frac{1}{10}\left(\log|y| - \log|5-y|\right) = x + \tilde{C} \quad \text{pour } \tilde{C}, x \in \mathbb{R}\,,$$
qui se récrit comme
$$\begin{aligned} \log\left|\frac{y}{5-y}\right| &= 10(x+\tilde{C}) = 10x + \hat{C} \qquad \text{pour } \hat{C} := 10\tilde{C} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{y}{5-y} &= \pm e^{10x+\hat{C}} = Ce^{10x} \qquad \text{pour } C := \pm e^{\hat{C}} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$
Ainsi
$$y(x) = \frac{5Ce^{10x}}{1+Ce^{10x}} \qquad \text{pour } C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \tag{1}$$
Si $C > 0$, la fonction $y(x)$ est une solution pour $x \in \mathbb{R}$ mais si $C < 0$, elle l'est pour $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{10}\log(-C)\right[$ ou $x \in \left]-\frac{1}{10}\log(-C), \infty\right[$.

Si $C = 0$, on a la solution triviale $y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Donc on peut prendre $C \in \mathbb{R}$ dans la solution générale (**??**).

Pour résumer, les solutions générales sont donc
$$\begin{array}{lll} y(x) = \dfrac{5Ce^{10x}}{1+Ce^{10x}}\,, & C > 0\,, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = \dfrac{5Ce^{10x}}{1+Ce^{10x}}\,, & C < 0\,, & x \in \left]-\infty, -\frac{1}{10}\log(-C)\right[\text{ ou } x \in \left]-\frac{1}{10}\log(-C), \infty\right[, \\ y(x) = 0\,, & C = 0\,, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = 5\,, & - & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

iii) En intégrant $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = dx$ des deux côtés on trouve $\operatorname{arcsinh}(y) = x + C$ pour $C, x \in \mathbb{R}$. Il s'en suit que $y(x) = \sinh(x+C)$ pour $C, x \in \mathbb{R}$.

iv) La fonction constante $y(x) = -1$ pour $x \in \mathbb{R}$ est une solution. On trouve les autres solutions par séparation des variables. En intégrant
$$\frac{dy}{y+1} = dx$$
de deux côtés on trouve
$$\log|y+1| = x + C_1, \quad \Longrightarrow \quad |y+1| = e^{x+C_1} \quad \Longrightarrow \quad y(x) + 1 = Ce^x,$$
où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C = \pm e^{C_1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. On a aussi la solution $y(x) = -1$ qui correspond à la valeur $C = 0$. Alors la solution générale est $y(x) = Ce^x - 1$ pour $x, C \in \mathbb{R}$.

v) Les fonctions $y(x) = 0, x \in]-\infty, 0[$ et $y(x) = 0, x \in]0, +\infty[$ sont des solutions. On trouve les autres solutions par séparation des variables en intégrant
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Alors on trouve

$$\log|y| = -\log|x| + C_1 = -\log|x| + \log C_2, \qquad C_1 = \log C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_2 \in \mathbb{R}_+,$$

$$\log|y| = \log\frac{C_2}{|x|} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{C}{x},$$

où $C = \pm C_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. La solution constante $y(x) = 0$ correspond à $C = 0$. Alors la solution générale est $y(x) = \dfrac{C}{x}$ pour $C \in \mathbb{R}$ et $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, \infty[$.

vi) La fonction $y = 0, x \in \mathbb{R}$ est une solution. On trouve les autres solutions par séparation des variables en intégrant

$$\frac{dy}{y^3 + y} = \frac{dx}{x}.$$

Pour la première intégrale on a

$$\int \frac{dy}{y(y^2+1)} = \int \left(-\frac{y}{y^2+1} + \frac{1}{y}\right) dy = -\frac{1}{2}\int \frac{d(y^2)}{y^2+1} + \int \frac{dy}{y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log(y^2+1) + \log|y| + C' = \log\frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} + C' \qquad C' \in \mathbb{R}.$$

Puisque $\int \dfrac{dx}{x} = \log|x| + \log C_1$ pour $C_1 \in \mathbb{R}_+$, on obtient

$$\log\frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} = \log C_1|x| \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

C'est une équation quadratique pour y. Finalement, les solutions générales sont $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ et

$$y(x) = \frac{Cx}{\sqrt{1 - C^2x^2}}, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \left]-\frac{1}{|C|}, \frac{1}{|C|}\right[.$$

Exercice 3.

i) (a) On trouve la solution générale par intégration

$$y(x) = 2e^x - 2x^2 + x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) La condition initiale donne $y(1) = 2e - 1 + C = 2e$, alors $C = 1$. La solution maximale qui satisfait les conditions données est $y(x) = 2e^x - 2x^2 + x + 1, \ \ x \in \mathbb{R}$.

ii) (a) On trouve la solution générale en intégrant deux fois

$$y'(x) = \int \sin x \cos x \; dx = \int \sin x \; d\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C', \quad C' \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\int \sin^2 x \; dx + \int C' \; dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x) \; dx + \int C' \; dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 2x + C'x + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x + C_2, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Les conditions initiales donnent $y(\pi/2) = C_1\frac{\pi}{2} + C_2 = 0$ et $y(0) = C_2 = 1$, alors $C_1 = -\frac{2}{\pi}$. La solution maximale qui satisfait les conditions données est $y(x) = -\frac{1}{8}\sin 2x - \frac{2}{\pi}x + 1, \ \ x \in \mathbb{R}$.

iii) (a) La solution générale est la même: $-\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x + C_2, \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Les conditions initiales donnent

$$y'(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 \qquad \Longrightarrow \qquad y'(0) = -\frac{1}{4} + C_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = \frac{1}{4},$$

et $y(0) = C_2 = 1$. La solution maximale qui satisfait les conditions données est $y(x) = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

i) (a) En écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée, celle-ci devient

$$\frac{dy}{y^2} = \sin x \; dx.$$

En intégrant de deux côtés on obtient

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + C' \qquad x, C' \in \mathbb{R},$$

Alors la solution générale est

$$y = \frac{1}{\cos x + C}, \qquad C \in \mathbb{R}, \;\; x \in \mathbb{R} : \cos x \neq -C.$$

(b) La condition initiale donne $y(0) = \dfrac{1}{1+C} = \dfrac{1}{2}$, alors $C = 1$. La solution maximale qui satisfait les conditions données est $y(x) = \dfrac{1}{\cos x + 1}$ pour $x \in \,]-\pi, \pi[$.

ii) (a) En écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée et en intégrant de deux côtés on obtient

$$\int y dy = \int 1 dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}y^2 = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Alors les solutions générales sont $y(x) = \pm\sqrt{2(x+C)}$, $C \in \mathbb{R}$, $x > -C$.

(b) La condition initiale donne $y(0) = \pm\sqrt{2C} = 0$. Cette condition ne peut pas être satisfaite parce que la fonction $y(x) = \sqrt{2x}$ n'est pas dérivable à $x = 0$. La solution qui satisfait la condition donnée n'existe pas dans ce cas.

iii) (a) En écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée et en intégrant de deux côtés on obtient

$$\int y dy = \int x dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Alors les solutions générales sont

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C'} \quad C' > 0, \;\; x \in \mathbb{R},$$
$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C'} \quad C' \leq 0, \;\; x \in]-\infty, -\sqrt{-C'}[\cup]\sqrt{-C'}, \infty[.$$

(b) La condition initiale donne $y(0) = \pm\sqrt{C'} = 0$. Alors on a $C' = 0$ et $y(x) = \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il est facile de voir que les deux solutions peuvent être collées à $x = 0$ de façon à ce que $y(x) = x$ et $y(x) = -x$ sont toutes les deux solutions maximales pour tout $x \in \mathbb{R}$ et elles satisfont la condition initiale $y(x) = 0$. Alors dans ce cas il existe deux solutions maximales pour la condition initiale donnée.

Remarque. Dans les cas (*ii*) et (*iii*) le théorème de l'existence et unicité d'une solution maximale d'une équation différentielle à variables séparées $f(y)y' = g(x)$ avec une condition initiale donnée ne s'applique pas parce que la fonction $f(y) = y$ s'annule sur son intervalle de définition en $y = 0$.

Exercice 5.

i) Pour $\omega \neq 0$ on vérifie la proposition par un calcul explicite. En effet, on a

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1\omega\sin(\omega x) + C_2\omega\cos(\omega x)\,, \\ y''(x) &= -C_1\omega^2\cos(\omega x) - C_2\omega^2\sin(\omega x) = -\omega^2\,y(x)\,, \end{aligned}$$

et donc on a bien $y'' + \omega^2 y = 0$.

ii) Si $\omega = 0$, l'équation différentielle se réduit à $y'' = 0$. En intégrant deux fois, on obtient la solution générale de cette équation qui est $y(x) = C_1 x + C_2$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

iii) Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, les conditions initiales données s'écrivent

$$\begin{aligned} y(1) &= C_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = C_2 = 3\,, \\ y'(1) &= -C_1\tfrac{\pi}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_2\tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -C_1\tfrac{\pi}{2} = 2\,. \end{aligned}$$

Ainsi on doit avoir $C_1 = -\frac{4}{\pi}$ et $C_2 = 3$ pour les satisfaire.

Exercice 6.

i) Vérification immédiate par un calcul direct.

ii) On a

$$y'(x) = \frac{1}{2y(x)}\,\frac{-C}{(x-1)^2}\,e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\,,$$

et

$$y(x)^2 + 1 = e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y'(x)\frac{2y(x)(x-1)}{y(x)^2+1} + \log\left(y(x)^2+1\right) &= \frac{1}{2y(x)}\,\frac{-C}{(x-1)^2}\,e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\,\frac{2y(x)(x-1)}{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}} + \log\left(e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\right) \\ &= \frac{-C}{x-1} + \log\left(e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\right) = \frac{-C}{x-1} + \frac{C}{x-1} = 0\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire les fonctions $y(x)$ satisfont l'équation différentielle donnée.

Avec la condition initiale $y(2) = -3$, on se trouve dans le cas où $x > 1$ et $y(x)$ est donnée par la racine négative. On a

$$y(2) = -\sqrt{e^C - 1} = -3 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^C - 1 = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \log(10) > 0.$$

Quand $y\left(-\frac{3}{2}\right)=2$, on est dans le cas où $x<-1$ et $y(x)$ est la racine positive. On a

$$y\left(-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{e^{\left(-\frac{2C}{5}\right)}-1}=2 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{\left(-\frac{2C}{5}\right)}=5 \qquad \Leftrightarrow \qquad C=-\frac{5}{2}\log(5)<0.$$

Remarque (digression): On parle ici d'une équation différentielle *exacte* parce qu'elle est de la forme $\frac{d}{dx}F(y(x),x)=0$ où $F(y,x)=(x-1)\log(y^2+1)$.