Anna Lachowska
20 mars 2025

Analyse II – Corrigé de la Série 5

Exercice 1.

i) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 : x_i = 0, i = 2, \ldots n\}$, alors l'adhérence est $\bar{E} = E$ puisque l'ensemble est fermé, et $\partial E = E = \{(x_1, 0, 0, \ldots 0)\}$ parce que toute boule de centre $x = (x_1, 0, \ldots, 0)$ contient des points avec $x_2 > 0$.

ii) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : ||x|| < 2, ||x - a|| > 1, a \in \mathbb{R}^n\}$, alors l'adhérence est $\bar{E} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 2, ||x - a|| \geq 1, a \in \mathbb{R}^n\}$. Pour la frontière on considère trois cas: (1) Si $B(a, 1) \subset B(0, 2)$, alors la frontière est $\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| = 1\}$; (2) Si $B(a, 1) \subset CB(0, 2)$, alors la frontière est $\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 2\}$; (3) Si $B(a, 1) \cap B(0, 2) \neq \emptyset$ et $B(a, 1) \cap CB(0, 2) \neq \emptyset$, alors la frontière est $\partial E = (\partial B(0, 2) \cap CB(a, 1)) \cup (\partial B(a, 1) \cap \bar{B}(0, 2))$.

iii) $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 : x_1 \neq 1\}$, alors l'adhérence $\bar{E} = \mathbb{R}^n$, et la frontière $\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\} = CE$.

Exercice 2. Le seul sous-ensemble compact est *c)*. En particulier, *a)* et *b)* ne sont pas fermés; et *d)* n'est pas borné.

Exercice 3.

i) *c)*. Le sous-ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{(x + y)^2 - 5(x + y) + 6} < \sqrt{2}\}$ n'est ni ouvert ni fermé. On a les conditions: $(x + y)^2 - 5(x + y) + 6 \geq 0$ (pour que la racine carrée existe) et $(x + y)^2 - 5(x + y) + 6 < 2$. La première condition est équivalent à $(x+y) \leq 2$ ou $(x+y) \geq 3$. La deuxième condition est équivalent à $1 < (x+y) < 4$. Alors le sous-ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x + y \leq 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3 \leq x + y < 4\}$, ce qui n'est pas un sous-ensemble ouvert, ni fermé.

ii) *a)*. Le sous-ensemble $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ x < y < x^2\}$ est ouvert. Pour $x \geq 0$ on a $x < x^2$ si est seulement si $1 < x$ Donc le sous-ensemble $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x < y < x^2\}$ contient tout les points (x, y) strictement entre la droite $y = x$ et la courbe $y = x^2$ pour tout $x > 1$. C'est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

i) $\overline{E} \subset \overline{F} \implies E \subset F$. Faux.
Contre-exemple: $E =]0, 1] \in \mathbb{R}$ et $F =]0, 1[\in \mathbb{R}$. Alors $\overline{E} = \overline{F} = [0, 1]$, mais $E \not\subset F$.

ii) $E \subset F \implies E \setminus A \subset F \setminus A$. Vrai.
Soit $x \in E \setminus A$. C'est équivalent à $x \in E$ et $x \in CA$, où CA est le complémentaire de A. Puisque $E \subset F$, cela implique que $x \in F$ et $x \in CA$, ce qui est équivalent à $x \in F \setminus A$.

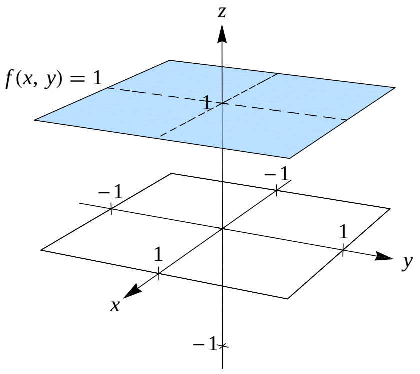
iii) $E \subset F \implies A \setminus F \subset A \setminus E$. Vrai.
Soit $x \in A \setminus F$. C'est équivalent à $x \in A$ et $x \in CF$. La proposition $x \in CF$ implique que $x \in CE$, puisque si $x \in E$, alors $x \in F$, contradiction. Donc $x \in CE$ et $x \in A$, ce qui est équivalent à $x \in A \setminus E$.

iv) $\partial E \subset \partial F \implies E \subset F$. Faux.
Contre-exemple: soit $E = \{x \in \mathbb{R}^n \ : x_1 < 1\}$, et $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \ : 0 < x_1 < 1\}$. Alors $\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n \ : x_1 = 1\}$ et $\partial F = \{x \in \mathbb{R}^n \ : x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \ : x_1 = 1\}$, donc $\partial E \subset \partial F$, mais $E \not\subset F$. Par exemple, le point $(-5, 0, 0 \ldots 0) \in E$ et $(-5, 0, 0 \ldots 0) \notin F$. Un autre contre-exemple: Soit $F = CE$. Alors puisque la définition de la frontière est symétrique par rapport à E et CE, on a $\partial E = \partial CE$. Mais $E \not\subset CE$, en fait $E \cap CE = \emptyset$.

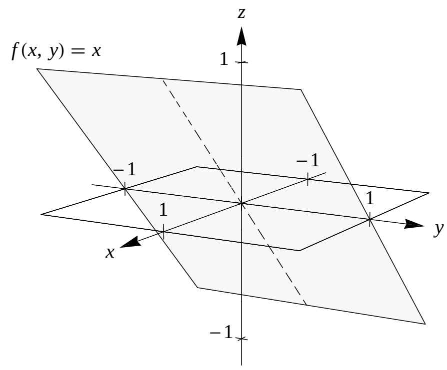
Exercice 5.

Les lignes hachurées sont les images des axes x et y par la fonction f. Soit $V(f)$ l'image de $f(x, y)$, où $(x, y) \in [-1, 1]$.

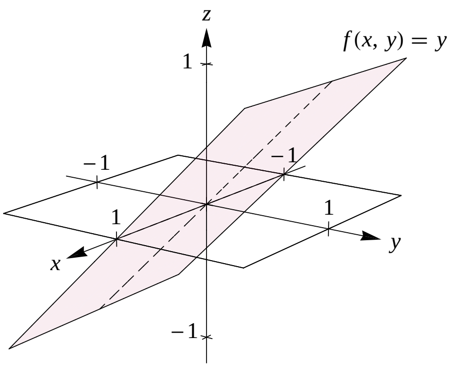
i) $V(f) = \{1\}$



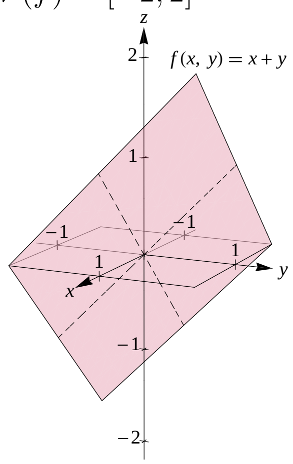
ii) $V(f) = [-1, 1]$



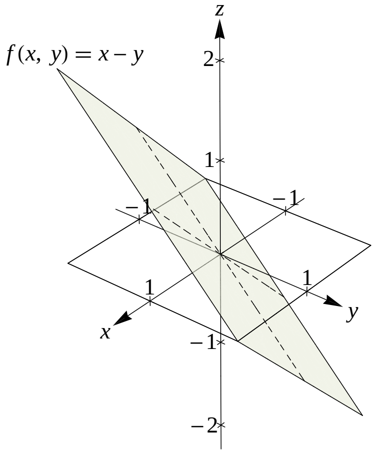
iii) $V(f) = [-1, 1]$



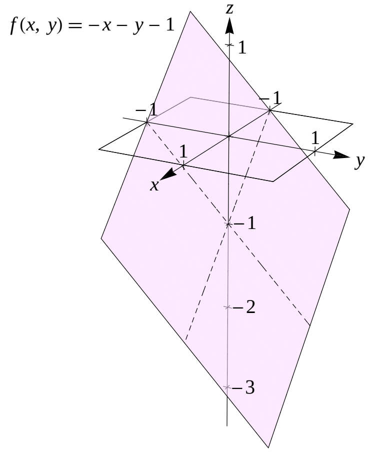
iv) $V(f) = [-2, 2]$



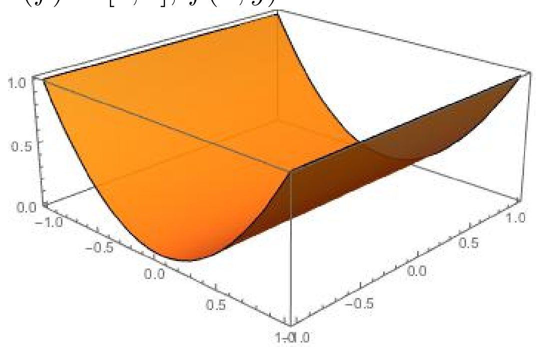
v) $V(f) = [-2, 2]$



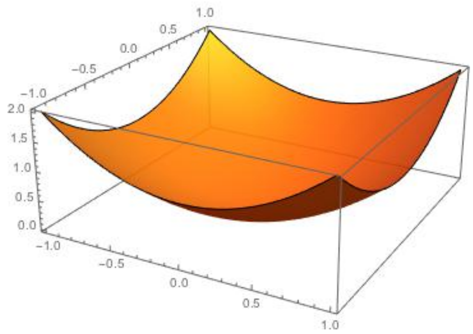
vi) $V(f) = [-3, 1]$



vii) $V(f) = [0, 1]$, $f(x, y) = x^2$



viii) $V(f) = [0, 2]$, $f(x, y) = x^2 + y^2$



Exercice 6.

i) On a $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^2 - 3y}{x + 2y^2} = \dfrac{4-3}{2+2} = \dfrac{1}{4}$.

ii) Désignons par $f(x, y)$ l'expression dont on cherche la limite. Alors

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, 0) = \frac{2}{5} \neq -\frac{3}{2} = \lim_{k\to\infty} f(0, \frac{1}{k}),$$

ce qui implique que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

iii) On utilise les coordonnées polaires: $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi $x^2 + y^2 = r^2$ et donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1 \quad \text{(Fig. 1).}$$

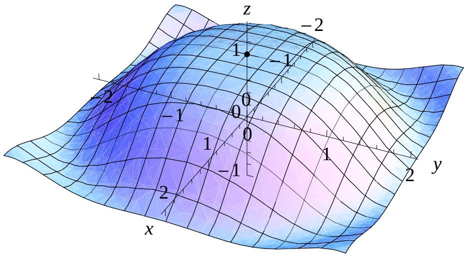


Fig. 1: La limite est représentée par le point noir.

Exercice 7.

i) Soit $\{\bar{a}_n\} = \{(\frac{1}{n}, 0)\}$ et $\{\bar{b}_n\} = \{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})\}$. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^3}} = 0 \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} f(\bar{b}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^3} - \frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}(1+4)^{3/2}} = \frac{2}{5^{3/2}}.$$

Donc la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2 - yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ n'existe pas.

ii) Soit $\{\bar{a}_n\} = \{(\frac{1}{n}, 0)\}$ et $\{\bar{b}_n\} = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} f(\bar{b}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{2}{n^2}} = 0.$$

Donc la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

iii) Soit $\{\bar{a}_n\} = \{(\frac{1}{n}, 0)\}$ et $\{\bar{b}_n\} = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^6}} = 0 \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} f(\bar{b}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}} = 1.$$

Donc la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^5}{(x^4+y^6)^{3/2}}$ n'existe pas.

iv) Soit $\{\bar{a}_n\} = \{(\frac{1}{n}, 0)\}$ et $\{\bar{b}_n\} = \{(0, \frac{1}{n})\}$. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1 \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} f(\bar{b}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -1.$$

Donc la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^2}{x^4+y^2}$ n'existe pas.