Anna Lachowska

Analyse II – Commentaire Série 13

Exercice 8. (Méthodes de démonstration)

Pour chacune des propositions suivantes, choisissez la méthode convenable. Démontrez la proposition. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit $n \geq 2$ un nombre naturel qui n'est pas premier. Alors n admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.
Démonstration par absurde. Puisque $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$ n'est pas premier, il admet une décomposition en facteurs premiers $n = p_1 p_2 \dots p_k$, pas nécessairement distinct, où $k \geq 2$. Supposons par absurde que $p_i > \sqrt{n}$ pour tout $i : 1 \leq i \leq k$. Alors on a:

$$n = p_1 p_2 \dots p_k > (\sqrt{n})^k = n^{\frac{k}{2}} > n,$$

puisque $k \geq 2$. Absurde. Donc la supposition était fausse et il existe $j : 1 \leq j \leq k$ tel que $p_j \leq \sqrt{n}$.

ii) Soit M l'ensemble des nombres naturels qui s'écrivent en utilisant seulement les chiffres 0 et 2. Par exemple, $20, 22, 202, 2222000 \in M$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $m \in M$ divisible par n.
Démonstration par le principe des tiroirs. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait par le principe des tiroirs que parmi $n+1$ nombres entiers il existe au moins 2 tels que leurs reste de division par n est le même, et donc leur différence est divisible par n. Considérons la suite des nombres naturels :

$$2, 22, 222, 2222, 22222, \dots$$

Parmi les premiers $n+1$ nombres dans la suite il existe au moins deux dont les restes de divisions par n sont les mêmes. La différence du plus grand moins le plus petit d'entre eux donne un nombre divisibles par n. De plus, la différence de deux nombres dans la suite est de la forme $2 \dots 20 \dots 0$ et donc elle s'écrit en utilisant seulement les chiffres 0 et 2, ce qui démontre la proposition.

iii) Soient $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Démonstration par récurrence généralisée.
Soit $P(n)$ la proposition désirée. Soit $n = 0$ Alors

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0.$$

$$f_1=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^1\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\sqrt5}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\right)=1.$$

Donc les propositions $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Considérons $P(n+2)$. Par la définition des nombres de Fibonacci et la supposition de récirrence on a

$$f_{n+2}=f_n+f_{n+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)+\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+2\sqrt5+5}{4}\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-2\sqrt5+5}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2}\right).$$

Donc $P(n)$ et $P(n+1)$ impliquent $P(n+2)$. Puisque $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies, par récurrence cela implique que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

iv) Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0=0, f_1=1$, $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Lucas: $l_0=2, l_1=1$, et $l_{n+2}=l_n+l_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors pour tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $n\in\mathbb{N}:\ n\le m$ on a

$$f_mf_n=\frac{1}{5}\left(l_{m+n}-(-1)^n l_{m-n}\right).$$

<u>Démonstration par récurrence sur deux variables</u>. Démontrons la proposition par la méthode carré:
Soit $n=0$. Alors la proposition $P(m,0)$:

$$f_m\cdot 0=\frac{1}{5}(l_m-l_m)=0$$

est vraie pour tout $m\in\mathbb{N}$ (pas besoin de récurrence).
Récurrence par m pour $n=1$: Soit $n=1$, $m\ge1$. Démontrons la proposition $P(m,1)$:

$$f_m=\frac{1}{5}(l_{m+1}+l_{m-1})$$

Base: $P(1,1)$: $f_1=\frac15(l_2+l_0)=\frac15(3+2)=1$ est vraie.
$P(2,1)$: $f_2=\frac15(l_3+l_1)=\frac15(4+1)=1$ est vraie.
Hérédité : Soit $m\ge1$. Démontrons que $P(m,1)$ et $P(m+1,1)$ impliquent $P(m+2,1)$:

$$f_{m+2}=f_m+f_{m+1}=\frac15(l_{m+1}+l_{m-1})+\frac15(l_{m+2}+l_m)=\frac15(l_{m+3}+l_{m+1}).$$

Dans les égalités on a utilisé la définition des nombres de Fibonacci et de Lucas. Donc $P(m,1)$ *est vraie pour tout* $m \geq 1$.
Récurrence par n. *Soit* $m \geq 2$ *et supposons que* $P(m,n)$ *et* $P(m,n+1)$ *sont vraie pour un* $n \leq m-2$. *Démontrons* $P(m,n+2)$*:*

$$f_m f_{n+2} = f_m(f_n + f_{n+1}) = \frac{1}{5}(l_{m+n} - (-1)^n l_{m-n}) + \frac{1}{5}(l_{m+n+1} - (-1)^{n+1} l_{m-n-1}) =$$

$$= \frac{1}{5}((l_{m+n} + l_{m+n+1}) - (-1)^n(l_{m-n} - l_{m-n-1})) = \frac{1}{5}(l_{m+n+2} - (-1)^{n+2} l_{m-n-2}).$$

On a utilisé la définition des nombres de Fibonacci et de Lucas et l'identité $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Donc pour tout* $m \geq 2$ *et* $n \leq m-2$, $P(m,n)$ *et* $P(m,n+1)$ *impliquent* $P(m,n+2)$. *Puisque* $P(m,0)$ *est vraie pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et* $P(m,1)$ *est vraie pour tout* $m \geq 1$, *par récurrence sur* n, *on peut conclure que* $P(m,n)$ *est vraie pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}:\ n \leq m$.