EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
15 mai 2025

# Analyse II – Commentaire Série 12

**Exercice 8.** (Méthodes de démonstration)

Pour chacune des propositions suivantes, choisissez la méthode convenable. Démontrez la proposition. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

*i)* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$-6 \leq |x+5| - |x-1| \leq 6$$

*Démonstration par disjonction des cas. On considère 3 cas:*
$x < -5$*. Alors on a*

$$|x+5| - |x-1| = -x - 5 + x - 1 = -6.$$

$-5 \leq x < 1$*. Alors on a*

$$|x+5| - |x-1| = x + 5 + x - 1 = 2x + 4, \qquad -10 + 4 \leq 2x + 4 < 2 + 4.$$

$x \geq 1$*. Alors on a*

$$|x+5| - |x-1| = x + 5 - x + 1 = 6.$$

*Donc la proposition est vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

*ii)* Nicolas a 10 poches et 44 pièces de monnaie. Il veut mettre ses pièces dans ses poches en les répartissant de telle sorte que chaque poche contienne un nombre différent de pièces. Peut-il le faire? Démontrez votre réponse.
*Nicolas ne peut pas le faire.*
*Démonstration par absurde. Supposons par absurde que Nicolas peut mettre ses pièces dans ses poches selon la règle proposée. Arrangeons les nombres des pièces dans les poches en ordre de croissance:* $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_{10}$*. Alors on a:*

$$0 \leq k_1, \ \ 1 \leq k_2, \ \ 2 \leq k_3, \ \ , \ldots, \ldots 9 \leq k_{10}.$$

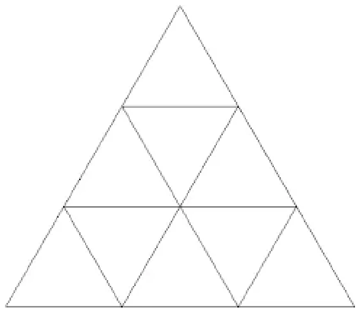
*Donc le nombre total des pièces est*

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{10} \geq 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45,$$

*mais Nicolas possède seulement* 44 *pièces, absurde.*

*iii)* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que son reste de division par 4 est 2 ou 3. Alors $n$ n'est pas un carré d'un nombre naturel.
*Démonstration par constraposée et disjonction des cas. Soit* $n = a^2$ *un carré d'un nombre naturel. Alors on a deux cas: soit* $a = 2k$ *est pair, soit* $a = 2k+1$ *est impair, où* $k \in \mathbb{N}$*. Dans le premier cas on a* $n = (2k)^2 = 4k^2$*, et donc* $n$ *est divisible par* 4*. Dans le deuxième cas on a* $n = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$*, et donc le reste de division de* $n$ *par* 4 *est* 1*. Alors si* $n$ *est un carré d'un nombre naturel, son reste de division par* 4 *ne peut pas être* 2 *ou* 3*. Par contraposée, la proposition suit.*

*iv*) Parmi 10 points situés à l'intérieur d'un triangle équilatéral de côté 3, il en existe au moins deux tels que la distance entre eux est inférieure à 1.
*Démonstration par le principe des tiroirs. Les droites parallèles à chaque côté du triangle et qui coupent deux autres côtés en 3 intervalles de longueur* 1 *divisent le triangle original en 9 triangles éqilatéraux de côté* 1 *chacun (voir la figure). Par le principe des tiroirs, au moins* 2 *d'entre* 10 *points sont dans le même petit triangle de côté* 1*, et donc la distance entre ces deux points est inférieure à* 1*.*



*v*) Le nombre des sous-ensembles d'un ensemble de $n \geq 1$ éléments est $2^n$.
*Démonstration par récurrence.*
*Base: Un ensemble d'un seul élément possède exactement deux sous-ensembles: lui-même et l'ensemble vide. Donc pour $n = 1$ la proposition est vraie.*
*Hérédité: Supposons que tout ensemble de $n \geq 1$ éléments possède exactement $2^n$ sous-ensembles. Soit $A$ un ensemble de $(n+1)$ éléments. On peut écrire $A = A' \cup \{a\}$, où $A'$ est un ensemble de $n$ éléments, et $a \in A$. Alors on peut diviser tous les sous-ensembles de $A$ en deux groupes:*
*(1) les sous-ensembles $B \subset A : a \notin B$. Alors $B \subset A'$ et par la supposition de récurrence, le nombre de sous-ensembles $B$ est $2^n$.*
*(2) les sous-ensembles $C \subset A : a \in C$. Alors $C$ est de la forme $C = C' \cup \{a\}$, où $C' \subset A'$. Par la supposition de récurrence, le nombre de sous-ensembles $C'$, et aussi des sous-ensembles $C$, est $2^n$.*
*Donc le nombre de tout les sous-ensembles de $A$ est $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Par récurrence, la proposition suit.*

*vi*) Soit $A$ un ensemble de $n \geq 1$ éléments. Le nombre des sous-ensembles de $A$ contenant un nombre pair d'éléments est $2^{n-1}$.

*Disjonction des cas.*
*On utilise la proposition précédente: il existe $2^n$ sous-ensembles d'un ensemble $A$ de $n$ éléments. Choisissons un élément $a \in A$. Soit $B \subset A \setminus \{a\}$, un sous-ensemble d'un ensemble de $n - 1$ éléments. Alors le nombre d'éléments $|B|$ peut être pair ou impair.*
*Cas 1: $|B|$ est pair. Alors $B \subset A \setminus \{a\} \subset A$ est un sous-ensemble de $A$ qui contient un nombre pair déléments.*
*Cas 2: $|B|$ est impair. Alors le sous-ensemble $B \cup \{a\} \subset A$ contient un nombre pair d'éléments. Les sous-ensembles de cas 1 sont différents des sous-ensembles de cas 2. Donc le nombre de sous-ensembles avec un nombre pair d'éléments de $A$ est égal au nombre de tous les sous-ensembles de $A \setminus \{a\}$, ce qui est égal à $2^{n-1}$.*