Anna Lachowska

Analyse II – Commentaire Série 11

Exercice 7. (Cyclicité de la trace)

Démontrez les propositions suivantes. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit $n \geq 2$ et A, B deux matrices $n \times n$ réelles. Démontrez que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

ii) Soient A, B, C trois matrices 2×2 réelles. Démontrez par contre-exemple qu'en général $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(BAC)$.

iii) Soit $n \geq 2$ et A, B, C trois matrices $n \times n$ réelles. Démontrez que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.

(i): On dénote $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{jk})$ *pour* $1 \leq i, j, k \leq n$. *Alors la multiplication matricielle s'écrit* $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$. *Les terms diagonaux sont* $(AB)_{ii} = \sum_j a_{ij} b_{ji}$. *Alors on a:*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \sum_j (BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA).$$

(On a le droit d'échanger l'ordre des sommes finies).

(ii): Par exemple, on peut prendre les matrices

$$ABC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BAC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{Tr}(ABC) = 2 \neq \mathrm{Tr}(BAC) = -1$.

(iii). Démonstration: si on pose $X = AB$ *et* $Y = C$, *alors l'égalité* $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$ *s'écrit* $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, *ce qui est la proposition démontré dans (i).*
On peut aussi donner un argument explicite. Comme dans (i), on dénote $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$ *pour* $1 \leq i, j, k, l \leq n$. *Alors on a* $(ABC)_{il} = ((AB)C)_{il} = \sum_k (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_k \sum_j a_{ij} b_{jk} c_{kl}$. *(On peut vérifier que la multiplication* $(ABC)_{il} = (A(BC))_{il}$ *donne le même résultat). Alors on a:*

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \sum_i (ABC)_{ii} = \sum_i \sum_k \sum_j a_{ij} b_{jk} c_{ki} = \sum_k \sum_i \sum_j c_{ki} a_{ij} b_{jk} = \sum_k \sum_i c_{ki} (AB)_{ik} =$$

$$= \sum_k (CAB)_{kk} = \mathrm{Tr}(CAB).$$

Ici on a échangé l'ordre des sommes finies et utilisé les règles de multiplication matricielle.

Exercice 8. (Critère de Sylvester, $n = 2$.)

Soit

$$M = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

une matrice symétrique réelle, et λ_1, λ_2 ses valeurs propres. On a démontré au cours 19 que *i)* $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det M > 0, r > 0$.

ii) λ_1 et λ_2 sont de signes opposés $\Leftrightarrow \det M < 0$.

Démontrez la propositions suivante: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det M > 0, r < 0$.

Une matrice réelle symétrique est diagonalisable avec toutes les valeurs propres réelles (Théorème spectral). On écrit

$$OMO^{-1} = O \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} O^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où O est une matrice orthogonale. On sait que

$$rt - s^2 = \det(M) = \det(O^{-1}DO) = \det(O)^{-1}\det(D)\det(O) = \det(D) = \lambda_1\lambda_2.$$

On sait aussi de l'Exercice 7 que

$$r + t = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(O^{-1}DO) = \mathrm{Tr}(OO^{-1}D) = \mathrm{Tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Pour démontrer la proposition, supposons que $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Alors on a $\det(M) = \lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0$, *et donc $rt > 0$ et r, t sont de même signe. De plus, on a* $\mathrm{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 = r + t < 0$, *donc $r < 0, t < 0$. Alors $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ implique* $\det(M) > 0$ *et $r < 0$.*

Supposons maintenant que $\det(M) > 0$ *et $r < 0$. Alors* $\lambda_1\lambda_2 = \det(M) > 0$ *et donc λ_1, λ_2 sont de même signe. Aussi,* $\det(M) = rt - s^2 > 0 \Rightarrow rt > 0$ *et donc r, t sont de même signe. Comme $r < 0$, alors $t < 0$ et* $\mathrm{Tr}(M) = r + t = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$. *Puisque λ_1, λ_2 sont de même signe, cela implique $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.*