EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
1 mai 2025

Analyse II – Commentaire Série 10

Démontrez la proposition suivante par récurrence sur deux variables. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

Exercice 6. (Nombres de Fibonacci, méthode carrée)

Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Démontrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$f_{m+n+1} = f_{m+1}f_{n+1} + f_m f_n.$$

ii) Utiliser (a) pour démontrer que pour tout $t \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ on a

$$f_{(t+1)k} = f_{tk+1}f_k + f_{tk}f_{k-1}$$

En déduire que f_k divise f_{tk} pour tout $k \geq 1$, $t \geq 1$.

(i)

i) Base:
$P(0,0):\ f_1 = f_1f_1 + f_0f_0 = 1 + 0 = 1$ est vraie.
$P(1,0))$ et $P(0,1):\ f_2 = f_2f_1 + f_1f_0 = f_1f_2 + f_0f_1 = 1 + 0 = 1$ sont vraies.
$P(1,1):\ f_3 = f_2f_2 + f_1f_1 = 1 + 1 = 2$ est vraie.

ii) Hérédité: soit $n \in N$ fixé. Démontrons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(n,m)$ et $P(n,m+1)$ impliquent $P(n,m+2)$. On a

$$f_{m+3}f_{n+1}+f_{m+2}f_n = (f_{m+1}+f_{m+2})f_{n+1}+(f_m+f_{m+1})f_n = (f_{m+1}f_{n+1}+f_mf_n)+(f_{m+2}f_{n+1}+f_{m+1}f_n) =$$

$$= f_{m+n+1} + f_{m+n+2} = f_{m+n+3}.$$

Puisque la proposition est symétrique par rapport à $m \leftrightarrow n$, le même calcul montre que pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n,m)$ et $P(n+1,m)$ impliquent $P(n+2,m)$.

iii) Conclusion: Finalement on a: $P(0,0)$ et $P(0,1)$ avec la récurrence sur m impliquent $P(0,m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. $P(1,0)$ et $P(1,1)$ avec la récurrence sur m impliquent $P(1,m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Maintenant soit $m \in \mathbb{N}$ arbitraire. Alors $P(0,m)$ et $P(1,m)$ avec la récurrence sur n impliquent $P(n,m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $P(n,m)$ est vraie pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Prendre $m = tk$, $n = k-1$ dans l'égalité (a) donne l'égalité (b). Démontrons la proposition $P(t,k):$ "pour tout $k \geq 1$ et $t \geq 1$, f_k divise f_{tk}" par récurrence en t.

i) Base:
$t = 1$. Alors f_k divise f_k pour tout $k \geq 1$. Donc $P(1, k)$ est vraie pour tout $k \geq 1$.

ii) Hérédité: supposons que f_k divise f_{tk}. Alors on a:

$$f_{(t+1)k} = f_{tk+1} f_k + f_{tk} f_{k-1}.$$

Puisque f_k divise les deux termes à droite, on peut conclure que f_k divise $f_{(t+1)k}$.

iii) Conclusion: Par récurrence la proposition $P(t, k)$ est vraie pour tout $t \geq 1$ et $k \geq 1$.

Exercice 7. (Nombres de Fibonacci, méthode diagonale). Démontrez la même proposition par la méthode diagonale suivant les étapes indiquées.
Soient $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$f_{m+n+1} = f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1}.$$

i) Démontrez que $P(n, 0)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) Démontrez que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ $P(n+1, m)$ implique $P(n, m+1)$.

iii) En déduisez que $P(n, m)$ est vraie pour tout $n, m \in N$.

i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $P(n, 0)$:

$$f_{n+1} = f_n f_0 + f_{n+1} f_1 = f_n \cdot 0 + f_{n+1} \cdot 1.$$

Alors $P(n, 0)$ est vraie pour tout $n \in N$ (pas besoin de récurrence).

ii) Supposons que pour tout $m, n \in N$, la proposition $P(n+1, m)$ est vraie. Considérons $P(n, m+1)$:

$$\begin{aligned} f_{n+m+2} &\overset{P(n+1,m)}{=} f_{n+1} f_m + f_{n+2} f_{m+1} \overset{Fib}{=} f_{n+1} f_m + (f_n + f_{n+1}) f_{m+1} = \\ &= f_{n+1}(f_m + f_{m+1}) + f_n f_{m+1} = f_{n+1} f_{m+2} + f_n f_{m+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n, m+1)$ est vraie.

iii) $P(n, 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et l'implication $P(n+1, m) \Rightarrow P(n, m+1)$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ impliquent $P(n, 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique $P(n, 2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi de suite. Alors $P(n, m)$ sont vraies pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.