Anna Lachowska
17 avril 2025

Analyse II – Commentaire Série 9

Exercice 7. (Récurrence sur deux variables)

Démontrez la proposition suivante par récurrence sur deux variables. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Lucas: $l_0 = 2, l_1 = 1$, et $l_{n+2} = l_n + l_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$f_{m+n} = \frac{1}{2}\left(f_m l_n + l_m f_n\right).$$

i) Base:
$P(0,0)$: $f_0 = 1/2(f_0 l_0 + l_0 f_0) = 0$ est vraie.
$P(1,0))$ et $P(0,1)$: $f_1 = 1/2(f_1 l_0 + l_1 f_0) = 1/2 \cdot 2f_1$ sont vraies.
$P(1,1)$: $f_2 = 1/2(f_1 l_1 + l_1 f_1) = 1/2 \cdot 2f_1 = f_1$ est vraie.

ii) Hérédité: soit $n \in N$ fixé. Démontrons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(n,m)$ et $P(n,m+1)$ impliquent $P(n,m+2)$. On a

$$f_{m+n+2} = f_{m+n} + f_{m+n+1} = 1/2(f_m l_n + l_m f_n) + 1/2(f_{m+1} l_n + l_{m+1} f_n) =$$

$$= 1/2((f_m + f_{m+1})l_n + (l_m + l_{m+1})f_n) = 1/2(f_{m+2} l_n + l_{m+2} f_n).$$

Puisque la proposition est symétrique par rapport à $m \leftrightarrow n$, le même calcul montre que pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n,m)$ et $P(n+1,m)$ impliquent $P(n+2,m)$.

iii) Conclusion: Finalement on a: $P(0,0)$ et $P(0,1)$ avec la récurrence sur m impliquent $P(0,m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. $P(1,0)$ et $P(1,1)$ avec la récurrence sur m impliquent $P(1,m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Maintenant soit $m \in \mathbb{N}$ arbitraire. Alors $P(0,m)$ et $P(1,m)$ avec la récurrence sur n impliquent $P(n,m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $P(n,m)$ est vraie pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. (Récurrence sur deux variables)

Choisissez la méthode et démontrez la proposition:
Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Fibonacci, et $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les nombres de Lucas: $l_0 = 2, l_1 = 1$, et $l_{n+2} = l_n + l_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$: $k \leq n$ on a

$$f_{n+k} + (-1)^k f_{n-k} = l_k f_n.$$

Démontrons la proposition par la méthode carré:

i) Base: Soit $k = 0$. Alors la proposition $P(n, 0)$:

$$f_n + f_n = l_0 f_n = 2f_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pas besoin de récurrence).
Soit $n \geq 1$ et $k = 1$. Alors la proposition $P(n, 1)$:

$$f_{n+1} - f_{n-1} = l_1 f_n = f_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} : \ n \geq 1$ par la propriété des nombres de Fibonacci.

ii) Hérédité: Soit $n \geq 2$ et supposons que $P(n, k)$ et $P(n, k+1)$ sont vraies pour un $k \leq n-2$. Démontrons que $P(n, k+2)$ est vraie:

$$f_{n+k+2} + (-1)^{k+2} f_{n-k-2} = f_{n+k} + f_{n+k+1} + (-1)^{k+2}(f_{n-k} - f_{n-k-1}) =$$

$$= (f_{n+k} + (-1)^k f_{n-k}) + (f_{n+k+1} + (-1)^{k+1} f_{n-k-1}) = l_k f_n + l_{k+1} f_n = l_{k+2} f_n.$$

Donc pour tout $n \geq 2$ et $k \leq n-2$, $P(n, k)$ et $P(n, k+1)$ impliquent $P(n, k+2)$.

iii) Conclusion: Puisque $P(n, 0)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $P(n, 1)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, par récurrence sur k, on peut conclure que $P(n, k)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N} : \ k \leq n$.