# Analyse II – Commentaire Série 8

**Exercice 6.** (Démonstrations par récurrence)

Démontrez les propositions suivantes par récurrence. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

*i)* Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ les nombres de Fibonacci: $f_1 = f_2 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \geq 2$ naturel, le nombre de Fibonacci $f_n$ est égal au nombre des suites de 1's et 2's telles que la somme d'éléments de chaque suite est $(n-1)$.
Exemple: $n = 5$. Les suites avec $a_i \in \{1, 2\}$ telles que la somme $\sum_i a_i = 4$ sont les suivantes:

$$\{1,1,1,1\},\ \ \{1,1,2\},\ \ \{1,2,1\},\ \ \{2,1,1\},\ \ \{2,2\}.$$

Le nombre des suites satisfaisant les conditions est $5 = f_5$.
*Démonstration par la récurrence généralisée.*

(a) *Soit $P(n)$ la proposition donnée: le nombre de suites d'éléments $a_i \in \{1,2\}$ telles que $\sum_i a_i = n-1$ est égale à $f_n$.*

(b) *Base:*
*$P(2)$ : $f_2 = 1$. Il existe une seule suite satisfaisant les conditions: $\{1\}$. Donc $P(2)$ est vraie.*
*$P(3)$ : $f_3 = 2$. Il existe deux suites satisfaisant les conditions: $\{1,1\}$ et $\{2\}$. Donc $P(3)$ est vraie.*

(c) *Hérédité :*
*Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraie pour un certain $n \geq 2$. Considérons $P(n+2)$. Soit $E$ l'ensemble des suites avec $a_i \in \{1,2\}$ et telle que $\sum_i a_i = n+1$. Soit $\{a_i\}$ une suite dans $E$. On considère deux cas: $a_1 = 1$ et $a_1 = 2$.*
*Si $a_1 = 1$, alors la somme $\sum_{i\geq 2} a_i = n$, et donc par la supposition de récurrence, on a exactement $f_{n+1}$ suites qui commence par 1 dans $E$.*
*Si $a_1 = 2$, alors la somme $\sum_{i\geq 2} a_i = n-1$, et donc par la supposition de récurrence, on a exactement $f_n$ suites qui commence par 2 dans $E$.*
*Puisque chaque suite dans $E$ commence par 1 ou par 2, on obtient $|E| = f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$ par la définition de Fibonacci. Donc $P(n+2)$ est vraie.*

(d) *Conclusion: Puisque $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies, et pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ et $P(n+1)$ impliquent $P(n+2)$, par récurrence généralisée $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$ naturel.*

*ii)* (Récurrence forte). Tout nombre naturel positif $n \geq 1$ est une somme des puissances *distinctes* de 2:

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots 2^{k_p},$$

où $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ sont des entiers naturels distincts. *Astuce: Pour construire la récurrence considérez le plus grand $k$ naturel tel que $2^k \leq n+1$.*

(a) *Soit $P(n)$ la proposition donnée.*

(b) *Base: $P(1)$: $1 = 2^0$ est vraie.*

(c) *Hérédité: Supposons que $P(s)$ est vraie pour tout $s : 1 \leq s \leq n$, et considérons $P(n+1)$. Soit $k$ le plus grand nombre naturel tel que $2^k \leq (n+1)$. Si $n+1 = 2^k$, $P(n+1)$ est vraie. Sinon, on peut écrire*

$$n + 1 = 2^k + m,$$

*où $1 \leq m < 2^k$ (sinon $k$ n'est pas le plus grand possible). Puisque $1 \leq m < (n+1)/2$, par la récurrence forte on suppose que $P(m)$ est vraie, et donc*

$$m = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots 2^{k_t},$$

*où $k_1 < k_2 < \ldots < k_t$ sont des entiers naturels distincts. Alors*

$$n + 1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots 2^{k_t} + 2^k.$$

(d) *Conclusion: Puisque $2^{k_t} \leq m < 2^k$, on a $k_1 < k_2 < \ldots < k_t < k$, ce qui implique $P(n+1)$. Donc par récurrence forte, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ naturel.*

**Exercice 8.** (Vrai /Faux /Peut-être)

Soit $P(n)$ une proposition telle que pour tout $n$ naturel, $P(n)$ implique $P(n+3)$. Pour chaque des propositions suivantes, décidez si elle est *(a)* toujours vraie, *(b)* toujours fausse *(c)* peut être vraie ou fausse.

i) $P(0)$ est fausse et $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. *(c). $P(n)$ peut être fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement, il suffit d'avoir $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ vraies pour que $P(n)$ soit vraie pour tout $n \geq 1$.*

ii) $P(n)$ est vraie pour tout $n < 80$ et fausse pour tout $n > 81$. *(b). $P(79)$ vraie implique $P(82)$ vraie.*

iii) $P(9)$ implique $P(3(n+3))$ pour tout $n$ naturel. *(a). $P(9)$ implique $P(9+3k)$ pour tout $k$ naturel.*

iv) $P(n)$ est fausse pour tout $n \leq 66$ et vraie pour tout $n \geq 69$. *(c) $P(n)$ peut être fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais il suffit d'avoir $P(69)$, $P(70)$ et $P(71)$ vraies pour que $P(n)$ soit vraie pour tout $n \geq 69$.*

v) $P(3n)$ est vraie et $P(3n+1)$ est fausse pour tout $n$ naturel. *(c). On a $P(3n)$ implique $P(3n+3)$, mais $P(3n+1)$ peut être fausse ou vraie.*

vi) Il existe $n, m$ naturels tels que $P(3n)$ est vraie et $P(3m)$ est fausse. *(c). Il est possible que $P(3n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais si $m < n$, par exemple $m = 1$ et $n = 2$, on peut avoir $P(3)$ fausse et $P(6)$ vraie (dans ce case $P(6+3n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$) .*