Anna Lachowska
3 avril 2025

Analyse II – Commentaire Série 7

Exercice 7. (Démonstrations par récurrence)

Démontrez les propositions suivantes par récurrence. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1.$$

(a) *Soit $P(n)$ la proposition ci-dessus.*

(b) *Base: $P(1)$: $1 \cdot 1! = 2! - 1$ est vraie.*

(c) *Hérédité: Considérons $P(n+1)$. En supposant $P(n)$, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k \cdot k!) = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! =$$

$$= (n+1)!(n+1+1) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Alors $P(n)$ implique $P(n+1)$.

(d) *Conclusion: Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

ii) Soit $a_n = 25^n - 19^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors a_n est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) *Soit $P(n)$ la proposition suivante: $a_n = 25^n - 19^n$ est divisible par 6.*

(b) *Base: $a_1 = 25 - 19 = 6$ est divisible par 6. Alors $P(1)$ est vraie.*

(c) *Hérédité: Supposons que $P(n)$ est vraie et considérons $P(n+1)$:*

$$a_{n+1} = 25^{n+1} - 19^{n+1} = 25 \cdot 25^n - 19 \cdot 19^n = (19+6) \cdot 25^n - 19 \cdot 19^n = 6 \cdot 25^n + 19 \cdot (25^n - 19^n) =$$

$$= 6 \cdot 25^n + 19 a_n.$$

Puisque a_n est divisible par 6 et $6 \cdot 25^n$ est divisible par 6, on conclue que a_{n+1} est divisible par 6, et donc $P(n)$ implique $P(n+1)$.

(d) *Conclusion: Par récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ naturel.*

iii) Supposons que les seules monnaies en circulation dans un certain pays sont de 3 et 5 centimes. Montrer que pour tout $n \geq 8$ naturel, il est possible de payer n centimes en utilisant des monnaies disponibles.

(a) *Soit $P(n)$ la proposition suivante: il est possible de payer n centimes un utilisant des monnaies disponibles.*

(b) *Base:*
$P(8)$: $3+5=8$ est vraie.
$P(9)$: $3+3+3=9$ est vraie.
$P(10)$: $5+5=10$ est vraie.

(c) *Hérédité: Supposons que $P(n), P(n+1), P(n+2)$ sont vraie et considérons $P(n+3)$ pour $n \geq 8$. Puisque la différences $n+3-n=3$ et on peut payer n centimes en utilisant des monnaies disponibles, la proposition $P(n+3)$ est vraie. Alors les propositions $P(n)$, $P(n+1)$, $P(n+2)$ impliquent $P(n+3)$ pour tout $n \geq 8$.*

(d) *Conclusion: Puisque $P(8)$, $P(9)$ et $P(10)$ sont vraies, et pour tout $n \geq 8$ les propositions $P(n)$, $P(n+1)$, $P(n+2)$ impliquent $P(n+3)$, par récurrence généralisée $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 8$ naturel.*