Anna Lachowska

Analyse II – Commentaire Série 6

Exercice 7. (Démonstrations en Analyse II: propriétés des fonctions continues)
Théorème: Une fonction continue sur un ensemble compact atteint son minimum et son maximum. Refaire la démonstration de ce théorème du cours suivant les étapes données.

i) Démontrer que si un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ n'est pas borné alors il existe une suite $\{u_k\} \subset S$ telle que $|u_k| > k$ pour tout k naturel positif. *La définition d'une sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}$ borné: il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in F$, $|x| \leq M$. La négation de cette proposition est: $S \subset \mathbb{R}$ n'est pas borné $\Leftrightarrow$ pour tout $M > 0$ il existe $x \in F : |x| > M$. En particulière, pour tout k naturel positif, il existe $u_k \in S : |u_k| > k$.*

ii) Utiliser (*i*) pour démontrer *par absurde* que si $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact et $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(E) \subset \mathbb{R}$ est un ensemble borné. *Voir la démonstration ci-dessous.*

iii) Soit $P \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble borné. Utiliser la définition du supremum et de l'infimum de P (voir Analyse I) pour construire deux suites $\{x_k\} \subset P$ et $\{y_k\} \subset P$ telles que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \inf(P)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \sup(P)$. *$M$ est le supremum d'un sous-ensemble $P \subset \mathbb{R}$ si est seulement si (1) $x \leq M$ pour tout $x \in P$, et (2) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in P$ tel que $M - y \leq \varepsilon$. Alors si $M = \sup(P)$, pour tout k naturel positif il existe $y_k \in P$ tel que $M - y_k \leq 1/k$. Evidemment la suite $\{y_k\} \subset P$ et $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = M$.*

iv) Utiliser (*iii*) en cas $P = f(E)$ pour montrer qu'il existe deux suites $\{\bar{a}_k\} \subset E, \{\bar{b}_k\} \subset E$ telles que $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{a}_k) = \inf(f(E))$ et $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{b}_k) = \sup(f(E))$. *Voir la démonstration ci-dessous.*

v) Les suites $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$ sont-elles nécessairement convergentes?[1] Utiliser la propriété du sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^n$ pour démontrer l'existence des sous-suites convergentes dans $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$. Soient $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ leurs limites respectives. *Les suites $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$ ne sont pas nécessairement convergentes. Contre-exemple: Soit $E = \overline{B(\bar{0}, 10)} \subset \mathbb{R}^2$ la boule fermé (compacte), et $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction continue donnée par la formule $f(x, y) = \cos(x^2 + y)$. On a $\sup(f(E)) = 1$. Considérons la suite $\{\bar{b}_k\} \subset E$, où $\bar{b}_k = (0, \frac{1}{k+1} + (1 + (-1)^k)\pi)$. Alors $\bar{b}_k = (0, 1), (0, \frac{1}{2} + 2\pi), (0, \frac{1}{3}), (0, \frac{1}{4} + 2\pi), \ldots$ et on obtient*

$$\lim_{k\to\infty} f(\bar{b}_k) = \lim_{k\to\infty} \cos\left(0 + \frac{1}{k+1} + (1 + (-1)^k)\pi\right) = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{1}{k+1}\right) = 1.$$

Clairement la suite $\{\bar{b}_k\}$ est divergente. La sous-suite d'éléments pairs (ou impairs) est convergente. Puisque le sous-ensemble E est compact, les suites $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$ sont bornées. Donc par Bolzano-Weierstrass il existent des sous-suites convergentes $\{\bar{a}_{k_p}\}$ et $\{\bar{b}_{k_q}\}$.

vi) Démontrer que si $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact, alors $\bar{a}, \bar{b}$ construits dans (*v*) appartiennent à E. Utiliser la propriété de la fonction continue f pour démontrer que $f(\bar{a}) = \inf(f(E))$ et $f(\bar{b}) = \sup(f(E))$. *Voir la démonstration ci-dessous.*

[1] Essayer de trouver un contre-exemple

Thm Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^n$ atteint son maximum et son minimum $\left(\Leftrightarrow \exists \max_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \ \exists \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) \right)$.

Dém: (1) $f(\bar{x})$ est bornée sur un compact E. Par absurde:

Supposons que $\exists \{\bar{x}_k\} \in E : |f(\bar{x}_k)| \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$. $\{\bar{x}_k\} \in E$ est une suite bornée

$\Rightarrow$ Par Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite convergente $\{\bar{x}_{k_p}\} \xrightarrow[p \to \infty]{} \bar{x}_0$.

Puisque E est compact $\Rightarrow \bar{x}_0 \in E$.

-95-

Puisque f est continue sur E $\Rightarrow \lim_{p \to \infty} f(\bar{x}_{k_p}) = f(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}$

mais par construction $|f(\bar{x}_k)| \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow$ absurde

$\Rightarrow f$ est bornée sur E.

(2) f atteint son min et max sur E.

$f(E)$ est un ensemble borné $\Rightarrow \exists M = \sup \{ f(\bar{x}), \bar{x} \in E \}, \ \exists m = \inf \{ f(\bar{x}), \bar{x} \in E \}$

$\Rightarrow \exists \{\bar{a}_k\}, \{\bar{b}_k\} \in E : \lim_{k \to \infty} f(\bar{a}_k) = m, \ \lim_{k \to \infty} f(\bar{b}_k) = M$.

$\{\bar{a}_k\}, \{\bar{b}_k\} \in E$ suites bornées. $\Rightarrow \exists$ sous-suites convergentes $a_{k_p} \to \bar{a}$,
$b_{k_p} \to \bar{b}$.

Puisque E est compact $\Rightarrow \bar{a} \in E$ et $\bar{b} \in E$

$$\Rightarrow \lim_{p \to \infty} f(\bar{a}_{k_p}) \overset{f \text{ continue}}{=} f(\bar{a}) = m$$

$$\lim_{p \to \infty} f(\bar{b}_{k_p}) \overset{f \text{ continue}}{=} f(\bar{b}) = M \quad \Rightarrow \exists \bar{a}, \bar{b} \in E : \ f(\bar{a}) = m = \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x})$$

$$f(\bar{b}) = M = \max_{\bar{x} \in E} f(\bar{x})$$

▨