Anna Lachowska
20 mars 2025

Analyse II – Commentaire Série 5

Exercice 6. (Démonstrations directes: topologie dans $\mathbb{R}^n$)

Démontrez les propositions suivantes en utilisant les astuces données. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, et $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_p$ des éléments distincts de $\mathbb{R}^n$.
Alors l'ensemble $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ est compact.
Astuce: (a) Trouver $M > 0$ tel que $A \subset \overline{B(\bar{0}, M)}$, (b) Démontrer que A est réunion finie des sous-ensembles fermés.

(a) Soit $M = \max\{||\bar{a}_1||, ||\bar{a}_2||, \dots ||\bar{a}_p||\}$. Alors $A \subset \overline{B(\bar{0}, M)}$, et donc $A \in \mathbb{R}^n$ est en sous-ensemble borné.
(b) Pour tout $i = 1, \dots p$ soit $A_i = \{\bar{a}_i\} \subset \mathbb{R}^n$. Alors $A = \cup_{i=1}^p A_i$. Chaque A_i est un sous-ensemble fermé puisque son complémentaire $\mathbf{C}A_i = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : ||\bar{x} - \bar{a}_i|| > 0\}$ est ouvert. En effet, si $\bar{y} \in \mathbf{C}A$, alors $B(\bar{y}, ||\bar{y} - \bar{a}_i||) \subset \mathbf{C}A$. Alors $A \cup_{i=1}^p A_i$ est fermé comme réunion finie des sous-ensembles fermés. Finalement, A est borné et fermé, et donc compact.

ii) Soit $t \in [0, \pi]$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = \cos(t), \ y = \sin(t), z = t\}$. (Graphique d'une hélice circulaire).

(a) Démontrer que $[0, \pi]$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$. *Astuce: Utiliser la caractérisation d'un sous-ensemble fermé: $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si E contient les limites des toutes les suites convergentes d'éléments de E.*

(a) Considérons $\mathbf{C}[0, \pi] = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\} \cup \{t \in \mathbb{R} : x > \pi\}$. Si $s \in \mathbf{C}[0, \pi]$, alors $B(s, \min(|0 - s|, |\pi - s|)) \subset \mathbf{C}[0, \pi]$, et donc le sous-ensemble $\mathbf{C}[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ est ouvert, et par conséquence le sous-ensemble $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ est fermé.
(b) Soit $(\cos(t_k), \sin(t_k), t_k)$une suite d'éléments de E qui converge dans $\mathbb{R}^3$. En particulier, la suite $(t_k) \subset [0, \pi]$ est convergente. Puisque l'ensemble $[0, \pi]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, la limite $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0 \in [0, \pi]$. Puisque les fonctions $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont continues et $t_0 \in [0, \pi]$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} \cos(t_k) = \cos(t_0)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \sin(t_k) = \sin(t_0)$. Alors la suite $(\cos(t_k), \sin(t_k), t_k)$ converge vers $(\cos(t_0), \sin(t_0), t_0) \in E$, et donc le sous-ensemble $E \in \mathbb{R}^3$ est fermé.

iii) Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1, \ x \in \mathbb{Q}, \ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Montrer que $\overline{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x, y \le 1\}$.
Astuce: Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x, y \le 1\}$. Montrer que tout $(a, b) \in S$ est la limite d'une suite d'éléments de E, et que toute suite convergente d'éléments de E converge vers un élément de S. Utiliser que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x, y \le 1\}$. Montrons que tout élément $(a, b) \in S$ est la limite d'une suite d'éléments de E. En effet, puisque $0 \le a \le 1$, il suit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $I_k = [a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}] \cap]0, 1[$ est un intervalle non-vide et non-point. Puisque $\mathbb{Q}$ est *dense dans* $\mathbb{R}$*, il existe* $x_k \in I_k$ *tel que* $x_k \in \mathbb{Q}$*. D'une façon similaire, puisque* $0 \leq b \leq 1$*, il suit que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *l'ensemble* $J_k = [b - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}] \cap]0, 1[$ *est un intervalle non-vide et non-point. Puisque* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*, il existe* $y_k \in J_k$ *tel que* $y_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*. Alors la suite* $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *est une suite d'éléments de* E*, et par construction* $\lim_{k \to \infty} (x_k, y_k) = (a, b)$*. Par la caractérisation de l'adhérence, pour que* $(a, b) \in \overline{E}$*, il faut et il suffit que* (a, b) *soit la limite d'une suite d'éléments de* E*. Donc* $S \subset \overline{E}$*. Puisque* S *est évidemment un sous-ensemble fermé, il contient les limites de toutes les suites convergentes de ses éléments, et en particulier les limites de toutes les suites convergentes d'éléments de* $E \subset S$*. Donc* $\overline{E} \subset S$*, et finalement* $\overline{E} = S$*.*