Anna Lachowska
13 mars 2025

Analyse II – Commentaire Série 4

Exercice 5. (Démonstration par le principe des tiroirs)

Démontrer les propositions suivantes par le principe des tiroirs. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) Soit S un ensemble de 100 nombres entiers. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble $P \subset S$ de 12 nombres tels que pour tout couple $a, b \in P$, la différence $a - b$ est divisible par 9.

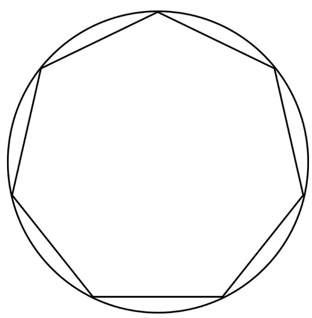
On divise l'ensemble S en 9 sous-ensembles selon le reste de division par 9:

$$S = \cup_{i=0}^{8} S_i, \qquad S_i = \{x \in S \ : \ x \equiv i \ (\mathrm{mod}\ 9).\}$$

Par le principe des tiroirs, au moins un des sous-ensembles S_i contiendra $n = \lceil \frac{100}{9} \rceil = 12$ éléments. Alors il y aura au moins 12 nombres avec les mêmes restes de divisions par 9. Donc pour tout couple $a, b \in P$, la différence $a - b$ est divisible par 9.

ii) Parmi tous les 8 points situés sur le cercle de rayon 1, il existe au moins deux tels que la distance entre eux est inférieure à 1. *Astuce:* La longueur d'un arc circulaire de rayon r et d'angle ϕ est ϕr.

Considérons un heptagone régulier inscrit dans le cercle. Il divise le cercle en 7 arcs de longueur $\frac{2\pi}{7} \cdot 1 < 1$. Supposons que chaque arc contient le point de départ mais pas le point d'arrivée dans le sens antihoraire. Alors les arcs sont disjoints et leur réunion est le cercle entier. Par le principe des tiroirs, il existe au moins un arc qui contient $\lceil \frac{8}{7} \rceil = 2$ points. La distance entre ces deux points ne surpasse pas la longueur de l'arc, et donc elle est forcément plus petite que 1.



iii) Démontrer par le principe des tiroirs que parmi cinq nombres naturels positifs distincts donnés n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 on peut toujours trouver deux nombres distincts n_t, n_s, tels que le nombre $n_t^2 - n_s^2$ soit divisible par 12. *Astuce: considérer d'abord la divisibilité par 4, et puis par 3.*

Premièrement on va démontrer qu'il existe parmi les nombres donnés trois nombres distincts n_i, n_j, n_k, tels que les nombres $n_i^2 - n_j^2$ et $n_i^2 - n_k^2$ soient divisibles par 4.

Soient a, b deux nombres naturels positifs distincts, tels que a et b sont de même parité. Alors chacun des nombres $(a - b)$ et $(a + b)$ est pair, et donc le nombre $a^2 - b^2 =$

$(a-b)(a+b)$ est divisible par 4. Par le principe des tiroirs, parmi 5 nombres naturels donnés n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 il existe au moins 3 nombres de même parité, disons n_i, n_j, n_k. Alors pour ces trois nombres, toute différence des carrés $n_i^2 - n_j^2$, $n_i^2 - n_k^2$, $n_j^2 - n_k^2$ est divisible par 4.

Maintenant considérons les restes de division par 3 des carrés des nombres naturels:
$a = 3k$, k naturel, alors $a^2 = 9k^2 \equiv 0 \pmod 3$
$a = 3k+1$, k naturel, alors $a^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \pmod 3$
$a = 3k+2$, k naturel, alors $a^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \pmod 3$
Donc le reste de division du carré d'un nombre naturel peut prendre deux valeurs, 0 et 1.

Soient n_i, n_j, n_k les trois nombres naturels positifs choisis dans la première partie de la démonstration. Par le principe des tiroirs, il existe au moins $\lceil 3/2 \rceil = 2$ d'entre eux, disons n_t et n_s, tels que le reste de division des carrés de ces nombres par 3 est le même. Alors $(n_t^2 - n_s^2)$ est divisible par 3.

Donc parmi cinq nombres naturels positifs distincts donnés n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, on peut trouver trois tels que la différence des carrés pour chaque couple soit divisible par 4; de plus parmi ces trois nombres on peut trouver deux tels que leur différence des carrés soit divisible par 3. En conclusion, parmi cinq nombres naturels positifs arbitraires on peut trouver deux tels que leur différence des carrés soit divisible par 12.