Anna Lachowska
6 mars 2025

Analyse II – Commentaire Série 3

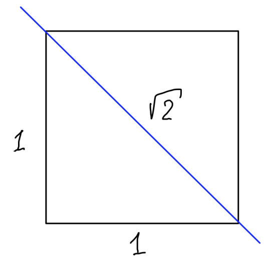
Exercice 7. (Démonstration par absurde)

Démontrer les propositions suivantes par absurde. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

i) $\sqrt{8}$ est irrationnel.
Soit $t = \sqrt{8}$. *On remarque que* $t = 2\sqrt{2}$, *et donc* t *est irrationnel si est seulement si* $\frac{t}{2} = \sqrt{2}$ *est irrationnel. La démonstration que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel est donnée ci-dessous.*

-17-

§ 1.3 Nombres réels.



Proposition: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\quad (x : x^2 = 2)$

Dém.: par absurde.

Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ tels que q est le plus petit possible

(ex: $\frac{18}{15} = \frac{6}{5} \Rightarrow p = 6, q = 5$)

Alors $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair

(Si $\underset{k \in \mathbb{Z}}{p = 2k+1} \Rightarrow p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ impair) $\Rightarrow p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2q^2 = (2m)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow$ par le même argument q est pair.

$\Rightarrow q = 2n$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$ absurde, contradiction avec le choix de q le plus petit possible, $q > 0$.

$\boxtimes$

ii) $\sqrt{37} + \sqrt{18}$ est irrationnel. *Astuce: considérer l'expression* $(\sqrt{37} + \sqrt{18})(\sqrt{37} - \sqrt{18})$.
Par absurde: supposons que $s = \sqrt{37} + \sqrt{18} > 0$ *soit rationnel. Le nombre* $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ *est irrationnel par l'argument similaire à la partie (i), et donc* $2\sqrt{18}$ *l'est aussi. Alors le nombre* $q = s - 2\sqrt{18}$ *est irrationnel (sinon* $s - q = 2\sqrt{18}$ *est rationnel). Donc on a:* $q = s - 2\sqrt{18} = \sqrt{37} - \sqrt{18}$ *est irrationnel. Cela implique que le produit* sq *est irrationnel (sinon si* $sq = p$ *est rationnel, et* $s \neq 0$, *alors* $q = \frac{p}{s}$ *est rationnel). Alors on a:* $sq = (\sqrt{37} + \sqrt{18})(\sqrt{37} - \sqrt{18}) = 37 - 18 = 19$ *est irrationnel, absurde. On en déduit que* $s = \sqrt{37} + \sqrt{18}$ *est irrationnel.*

iii) Soit (x_n) une suite convergente de nombres réels, telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Supposons qu'ils existent des nombres $a < b \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $a < x_n < b$. Alors $a \leq x \leq b$.

Démonstration par absurde et disjonction des cas.
Cas 1: Supposons que $x < a$, *et soit* $d = a - x > 0$. *Puisque* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, *il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $x - d \leq x_n \leq x + d$ *pour tout* $n \geq k$. *D'autre part, on a que* $a < x_n < b$ *pour tout* $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. *Donc pour tout* $n \geq \max(k, n_0)$ *on a:* $x_n \leq x + d = a$ *et* $x_n > a$, *absurde. Alors notre supposition était fausse, et* $x \geq a$.
Cas 2. Supposons que $x > b$, *et soit* $c = x - b > 0$. *Puisque* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, *il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $x - c \leq x_n \leq x + c$ *pour tout* $n \geq m$. *D'autre part, on a que* $a < x_n < b$ *pour tout* $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. *Donc pour tout* $n \geq \max(m, n_0)$ *on a:* $x_n \geq x - c = b$ *et* $x_n < b$, *absurde. Alors notre supposition était fausse, et* $x \leq b$.
On conclut que $a \leq x \leq b$.